

引用格式: 廖屹, 张磊. 基于双特征的短波红外星图识别算法[J]. 电光与控制, 2024, 31(6): 56-61. LIAO Y, ZHANG L. A short-wave infrared star map recognition algorithm based on double features[J]. Electronics Optics & Control, 2024, 31(6): 56-61.

基于双特征的短波红外星图识别算法

廖屹^{1,2}, 张磊¹

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130000; 2. 中国科学院大学, 北京 100000)

摘要: 在短波红外波段进行昼夜测星有望实现近地空间全天时自动导航, 其中星图识别算法是实现全天时导航的关键技术之一。传统的三角形算法在导航星数增多的情况下, 由于其匹配特征维度低, 在识别时容易出现冗余匹配、误匹配的情况。针对这一问题, 提出了一种基于双特征的短波红外星图识别算法, 该算法选取三角形的面积与外切圆半径双高维特征作为匹配特征, 通过构建面积特征的 K 矢量索引, 应用 K 矢量查找法降低匹配识别的计算复杂度。此外, 还提出一种优化的观测三角形的选择策略, 减少了匹配过程中的计算量, 提高算法的识别速度。实验表明, 星点位置噪声低于 2 像素时, 算法的平均识别率优于 95%; 伪星数未超过 50% 时, 平均识别率可达 87.6%; 并通过实际观星试验验证了所提算法的可行性。与改进的三角形算法相比, 该算法在识别速度、识别率以及抗噪声能力等方面都有明显优势。

关键词: 短波红外; 星敏传感器; 星图识别; 三角形算法; K 矢量查找

中图分类号: TP391.4 文献标志码: A doi: 10.3969/j.issn.1671-637X.2024.06.010

A Short-Wave Infrared Star Map Recognition Algorithm Based on Double Features

LIAO Yi^{1,2}, ZHANG Lei¹

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130000, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100000, China)

Abstract: The nycterohemeral star survey in short-wave infrared band is expected to realize the all-time automatic navigation in near-earth space, in which the star map recognition algorithm is one of the key technologies for realizing the all-time navigation. The traditional triangle algorithm is prone to redundant matching and miss-matching in recognition due to its low dimension of matching features when the number of navigation stars increases. To address this problem, this paper proposes a dual-feature based shortwave infrared star map recognition algorithm, which selects dual high-dimensional features of triangle's area and tangent circle radius as matching features, and reduces the computational complexity of matching recognition by constructing a K -vector index of area features and applying K -vector lookup method. In addition, an optimized selection strategy of observation triangles is proposed to reduce the computation cost in the matching process and improve the recognition speed of the algorithm. The test shows that: 1) The recognition rate is higher than 95% when the noise of star point position is less than 2 pixels; and 2) The recognition rate of the algorithm can reach 87.6% when the number of pseudo-stars does not exceed 50%. The feasibility of the proposed algorithm is verified by actual star observation test. Compared with the improved triangle algorithm, the algorithm has obvious advantages in the recognition speed, recognition rate and noise resistance capability.

Key words: short-wave infrared; star sensor; star map identification; triangle algorithm; K -vector search

收稿日期: 2023-07-20

修回日期: 2023-08-19

基金项目: 2020 年吉林省预算内基本建设资金(创新能力建设)项目(2020C023-4)

作者简介: 廖屹(1999-)男, 江西抚州人, 硕士生。

通讯作者: 张磊(1982-)男, 吉林长春人, 博士, 副研究员, 硕导。

0 引言

星敏传感器是一种以恒星为测量对象的高精度、高可靠性、自主性强的姿态敏感器, 可以输出高精度的姿态信息, 目前被广泛应用于各种导航任务。随着星敏传感器

技术的快速发展及其应用领域的不断扩大,研究应用于近地空间的全天时星敏传感器已经是重要的发展趋势之一^[1-2]。白天天空的强背景辐射是制约全天时星敏传感器应用的主要因素,白天近地空间内强烈的背景辐射会使工作在可见光波段的星敏传感器的探测灵敏度严重降低,导致其无法完成导航任务^[3-4]。相关研究表明,天空背景辐射强度随着波长的增大而急剧减小,为了抑制白天天空背景辐射、提高星敏传感器的灵敏度,结合红外星表中的红外波段范围,利用工作在 $0.9 \sim 1.7 \mu\text{m}$ 波段的短波红外探测器进行昼夜测星导航已成为星敏传感器设计中的重要研究内容^[5-6]。相比于可见光相机,短波红外相机在某些特定窗口的天空背景辐射强度更低,大气透过率更高,对于雾、烟、霾的敏感性更弱,并且短波红外相机具有更大的满阱容量,在白天中可以获得充足的信噪比图像,更加有利于实现全天时天文导航^[7]。

星图识别是短波红外星敏传感器的全天时导航任务中的一个关键环节^[8]。短波红外星表与可见光星表相比,星表中的恒星数量巨大,目前使用比较广泛的可见光 Tycho-2 星表中小于3星等的I波段恒星仅有不到300颗,而在相同星等条件下短波红外星表中的恒星数据量是可见光星表的数倍^[9]。现有的短波红外探测器面阵偏小,导致像元角分辨率较低,致使星点定位精度较低,并且短波红外星图中的伪星点坏像素较多,对星图识别算法的抗星点位置噪声和抗伪星噪声能力的要求较高。目前在实际工程应用中,星图识别是以星角距为匹配特征的传统三角形算法^[10]为主,该算法因匹配特征维度低、抗噪声能力较差,在识别时比较匹配次数多,容易出现冗余匹配、识别慢、误匹配等问题,严重影响星敏传感器的工作性能^[11]。

针对传统三角形识别算法的这一问题,本文提出了一种基于双特征的短波红外星图识别算法,通过使用三角形的面积和外切圆半径双高维特征作为匹配识别特征,减少冗余匹配与误匹配的出现,并且提出一种优化的观测三角形的选择策略,进一步提高算法的识别率,减少了匹配过程中的计算量,提高算法的识别速度。最后对算法进行了仿真实验和实际星图验证,证明本文算法具有匹配识别时间短、识别率高、鲁棒性强等优点。

1 导航特征库的建立

1.1 特征量的选取

星图识别是在导航特征库中查找一个与观测特征量唯一匹配导航星特征量的过程,因此如何选取一组合适的特征量信息,直接关系到星图识别算法的整体性能。三角形有多个具备平移、旋转、比例不变性的几何特征,如边长、角度、高度等,传统的三角形算法一般选择三角形的边长或对角作为匹配特征量。但这类特征

量提供的信息不够完全、特征的维度低,容易造成冗余匹配和误匹配,并且需要在特征库中对边长或角度特征进行多次查找与匹配,严重影响星图识别的速度。因此,本文采用导航星三角形面积与外切圆半径双高维特征量相结合的方式减少冗余匹配与误匹配的出现。

3颗导航星构成一个导航三角形,其3个内角分别为 A 、 B 和 C ,外切圆圆心为 O ,外切圆半径为 R ,三个边长分别为 a 、 b 和 c ,如图1所示。

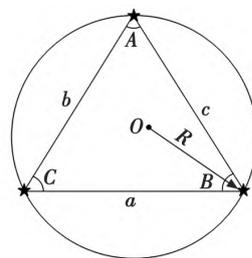


图1 三角形及其外切圆

Fig.1 A triangle and its tangent circle

由三角形的正弦定理和余弦定理得

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{absin C}{2} \quad (2)$$

$$2R = \frac{c}{2\sin C} \quad (3)$$

由三角函数 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ 可得

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ R = \frac{abc}{2\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $p = \frac{a+b+c}{2}$, 为三角形周长的1/2。

式(4)说明面积和外切圆半径仅与三角形的边长有关,而导航三角形的边长为任意两星 i 和 j 之间的星角距,假设导航星 i 和 j 的赤经与赤纬坐标分别为 (α_i, β_i) 和 (α_j, β_j) ,则在天球坐标系下两星之间的星角距算式为

$$d(i, j) = \arccos \frac{\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j}{|\mathbf{V}_i| \cdot |\mathbf{V}_j|} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ \cos \alpha_i \sin \beta_i \\ \sin \beta_i \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \cos \beta_j \\ \cos \alpha_j \sin \beta_j \\ \sin \beta_j \end{pmatrix}$ 分别为

导航星 i 和 j 在天球坐标系下的方向矢量。

1.2 导航特征库的构建与索引

本文使用公开的短波红外星表 2MASS^[12] 作为导航特征库的基础天文星表,根据星敏传感器的极限探测星等,利用星等阈值法选取星等不高于4.4 Mv的亮星,并对星表中的双星进行处理,最终得到7274颗符合条件的导航星。

表1 特征三角形的存储结构

Table 1 Storage structure of characteristic triangle

序号	特征值	序号	特征值
1	星号1	4	三角形面积 S
2	星号2	5	外切圆半径 R
3	星号3		

对基础星表进行预处理操作后,假设星表中共有 n 颗星,如果任意选取星表中的 3 颗导航星组成导航三角形,则理论上可以构建 C_n^3 个导航特征三角形,所生成的特征量太大,需要占用太多的内存来存储。为了解决这个问题,需要在构建特征库时对导航三角形按照一定条件进行筛选,在满足特征数据完备性的前提下减少数据量,构建导航特征库的具体步骤如下:

1) 采用文献[13]的算法在单位天球球面上均匀分布 10 000 个点,以每个点作为视轴中心,按照一定的视场大小生成一幅导航星图;

2) 根据星图中导航星的数量,在每个星图中最多选取其中最亮的 N_s 颗恒星,用式(4)计算所选恒星生成的每个导航三角形的特征值;

3) 按照表1所示的存储结构将每个导航星图中的三角形特征信息存储在导航特征库中。

通过以上步骤,可以大大减少三角形特征的数量,当星传感器视场为 $8^\circ \times 6^\circ$ 、极限探测星等为 4.4 Mv 的条件下,选取导航星图中 6 颗最亮星,最后得到由 166 799 组特征量数据组成的导航特征库。在星图识别过程中,为了避免出现每次特征查找都需要遍历搜索整个导航特征库中导航三角形的特征量而导致识别速度过慢的问题,本文通过对导航特征库中的面积特征构建 K 矢量索引表,在识别中采用 K 矢量查找法^[14]来实现对观测特征的快速定位。

2 星图识别算法

2.1 观测三角形的选择

星传感器对恒星的成像是基于针孔成像原理的,恒星光矢量在星传感器成像面上的成像过程见图2。

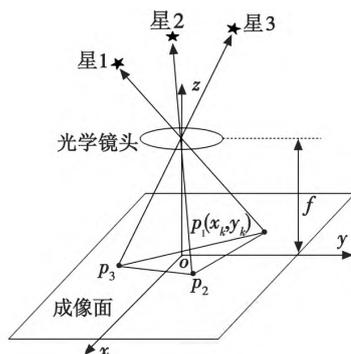


图2 星传感器成像示意图

Fig. 2 Schematic diagram of star sensor imaging

其理想的变换关系为

$$W = C_i^s V \quad (6)$$

式中: C_i^s 为天球坐标系到星传感器坐标系的旋转矩阵; W 为恒星光矢量在天球坐标系下的坐标; V 为经过星图识别得到的恒星光矢量在星传感器坐标系下的坐标。基于 V 中的多个星光矢量信息,就可以通过姿态解算算法解算出旋转矩阵 C_i^s 。

当星图识别的观测三角形的 3 颗星位置相关性较强时, $V^T V$ 高度近似奇异,导致解算时对 V 矢量矩阵求逆失败,从而使得姿态解算失败,即星图识别失败^[15]。这时就只能选择其他观测三角形进行识别,严重影响了星图识别的识别速度。由于星图匹配一次的计算量远大于视场中选取最优观测三角形所需要的计算量,有必要选择一种好的观测三角形选择策略,使三角形特征匹配的尝试次数最小化。

观测三角形的选择如图3所示, A_s, B_s, C_s 为组成观测三角形的 3 颗观测星, R_i 为观测三角形的内切圆半径。

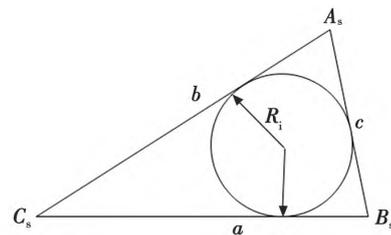


图3 观测三角形的选择

Fig. 3 Selection of observed triangles

为了减少 3 颗观测星在成像面上位置的相关性,避免高度近似奇异问题的产生,由 QUEST 姿态解算算法的定姿原理分析,三角形内切圆半径 R_i 应至少大于双星门限阈值,即 $R_i > \delta$,其中 δ 为双星门限阈值,内切圆半径的算式为

$$R_i = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad (7)$$

R_i 可用于评定观测三角形的 3 颗星在成像面上位置的相关性关系,观测三角形的 R_i 越大,说明组成三角形的 3 颗星之间的相关性越弱,识别成功和解算出姿态的可能性就越高。因此,在待选观测三角形集合中,应选取 R_i 值较大的观测三角形优先进行识别,以确保算法识别的成功率,减少匹配过程中的计算量,提高算法的识别速度。

2.2 星图识别

本文星图识别算法采用多步匹配的方法,算法要求视场内的观测星至少为 4 颗,具体识别流程如下。

1) 遍历星图中的所有观测星,优先选取视场中最亮的 M 颗星任意组成观测三角形,将这些观测三角形组成待选观测三角形集合。

2) 按照本文提出的选择策略从待选观测三角形集合中选取要识别的观测三角形, 计算观测三角形的面积和外切圆半径特征值, 对其面积特征值使用 K 矢量查找法进行快速定位, 得到初始匹配范围。

3) 在2)中得到的初始匹配范围内, 根据

$$|R_{\text{obs}} - R_{\text{ref}}| \leq \varepsilon_R \quad (8)$$

进行二次匹配。式中: R_{obs} 为观测三角形的外切圆半径; R_{ref} 为导航特征库中的特征值; ε_R 为外切圆的匹配门限。

4) 若3)中匹配的结果唯一, 则观测三角形识别成功, 否则引入第4颗星与观测三角形中任意两颗星构建另一个三角形进行识别, 以进一步减少冗余匹配结果。

5) 若4)中匹配的结果唯一, 则识别成功, 否则, 返回2)重新挑选新的一组观测三角形进行识别, 直至识别成功。

6) 若待选观测三角形集合中的观测三角形均被识别匹配过, 则星图识别失败, 结束识别流程。

3 仿真与试验结果分析

3.1 仿真结果与分析

本文的仿真设备是一台处理器为 Intel Core i5-9300H、主频 2.40 GHz 的计算机。仿真中星传感器参数设置采用某国产 InGaAs 短波红外相机的相关参数, 如表 2 所示。仿真实验利用蒙特卡罗方法随机产生星传感器的视轴指向, 并按照设定的 $8^\circ \times 6^\circ$ 的视场大小, 根据星图模拟原理生成模拟星图进行识别。为了更好地分析所提算法的特点, 从对噪声的鲁棒性、识别时间等方面与改进三角形算法^[10]进行对比验证, 该算法是较具代表性的恒星识别算法, 并通过在轨得到了验证。

表 2 星传感器参数

Table 2 Star sensor parameters

参数	数值	参数	数值
FOV/(°)	8×6	焦距 f /mm	68
阵列大小/像素	640×512	极限探测星等/M _v	4.4
像元尺寸 D /mm	0.015		

星传感器在对星点成像过程中受到图像传感器畸变或者光学系统的噪声、安装偏差等因素的影响, 致使在质心提取过程中星点位置发生偏差。为了模拟这一偏差, 在模拟星图的生成过程中, 在星点的垂直和水平坐标上添加服从高斯分布、均值为 0、标准差从 0.2 像素变化至 2 像素的位置噪声。随机生成 10 000 幅全天空模拟星图, 在每 1000 幅模拟星图中加入相同水平的位置噪声, 然后使用两种算法模拟星图进行识别, 并对识别结果进行统计。两种算法的识别结果如图 4 所示, 当位置噪声低于 1 像素时, 两种算法的平均识别率

都在 95% 以上; 当位置噪声从 1 像素增加到 2 像素时, 改进三角形算法中位置噪声的存在导致匹配的角距值改变, 从而产生误匹配情况, 在位置噪声为 2 像素水平时, 算法的平均识别率下降至 83.5%。而本文算法由于使用双高维特征作为匹配特征, 平均识别率随着位置噪声的增加而下降缓慢, 在位置噪声为 2 像素时, 平均识别率依旧高达 96.5%, 明显优于改进三角形算法, 充分验证了本文算法对位置噪声的强鲁棒性。

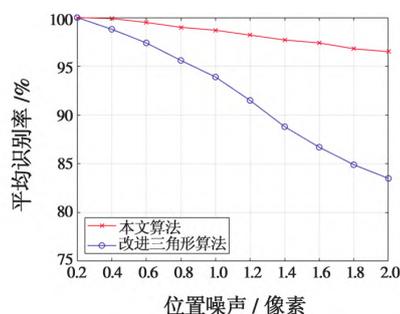


图 4 不同位置噪声水平下的平均识别率

Fig. 4 Recognition rate of different levels of position noise

假星是在星传感器对星点成像过程中, 进入视场的杂散光或其他非恒星目标在星图中产生的类似于星点的伪目标。为了验证本文算法对于假星干扰的鲁棒性, 根据星图模拟原理随机生成 10 000 幅全天空模拟星图, 并在模拟星图的随机位置处加入不同数量星等范围在 0~4 M_v 之间的假星。对于一个随机生成的模拟星图, 假设图中真实星点数为 N , 随机加入的假星数为 N_f , 则图中假星的比例表示为

$$P = \frac{N_f}{N_f + N} \quad (9)$$

在生成的模拟星图中加入 0%、10%、20%、30%、40% 和 50% 比例的假星, 每种比例假星下的模拟星图各 1000 幅, 使用两种算法进行识别, 并对不同比例下假星识别结果进行统计。两种算法在不同比例假星条件下的识别率如图 5 所示。

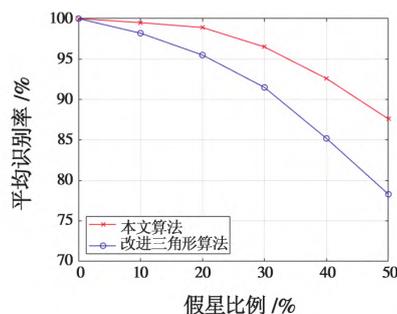


图 5 不同比例假星条件下的识别率

Fig. 5 Recognition rate under different percentage of false stars

与使用单特征匹配到的改进三角形算法相比, 本

文提出的算法受假星的影响较小,这是因为本文所提算法使用双特征组来进行匹配识别,增加了对假星的进一步验证。当假星数占50%时,所提算法平均识别率可达87.6%,而此时改进三角形算法降低到78.3%,比本文算法低9.3%,可见,与改进三角形算法相比,本文算法对伪星噪声的鲁棒性更强。

在星敏感器成像过程中,各种干扰会导致某些暗星无法出现在观测星图中。因此,在模拟星图中的恒星的星等上加入服从高斯分布、均值为0、标准差从0 Mv变化到1 Mv的星等噪声来模拟这一情况。每1000幅模拟星图添加同水平的星等噪声,两种算法在不同水平星等噪声下的识别率如图6所示。从图中可以看出,两种算法对于星等噪声的变化并不很敏感,当星等噪声为1 Mv时,平均识别率优于98%,这主要是由于两种算法在识别时都未使用准确的星等信息。

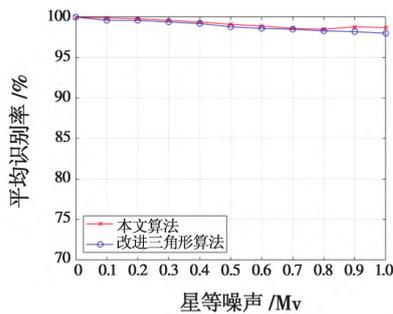


图6 不同星等噪声下的识别率

Fig. 6 Recognition rate under different star magnitudes noise

算法的内存使用量与识别时间是星图识别算法重要的性能参数。随机产生10 000幅模拟星图,并在星图中添加标准差为1像素的位置噪声、20%比例的假星以及标准差为0.5 Mv的星等噪声,分别使用两种算法进行匹配识别。表3展示了两种算法对单幅星图的平均识别时间、对10 000幅模拟星图的平均识别率,以及算法导航特征库所使用的内存大小。从表中可以看出,本文算法在识别时间和识别率方面有着明显优势。

表3 识别算法对比

Table 3 Recognition algorithm comparison

算法	存储容量/ MiB	平均识别时间/ ms	平均识别率/ %
本文	8.2	14.27	95.5
改进三角形	2.4	68.45	82.4

3.2 试验结果与分析

本文在对模拟星图进行识别的同时,还对实际星敏感器拍摄的多幅真实星图进行了试验。图7为星敏感器在某观测站的外场试验图,图中成像设备为某国产InGaAs短波红外相机,相机的关键参数同表2。对一幅通过多帧叠加得到的外场试验原始星图进行图像

去噪、星点提取等预处理操作,并对提取的星点结果使用本文所提算法进行匹配识别,结果如图8所示。星点提取与识别出的导航星信息如表4所示,进一步验证了所提算法的可行性。

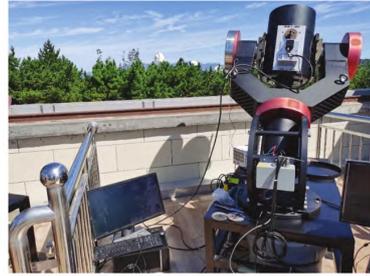


图7 某观测站的外场试验图

Fig. 7 Field experiment at an observatory

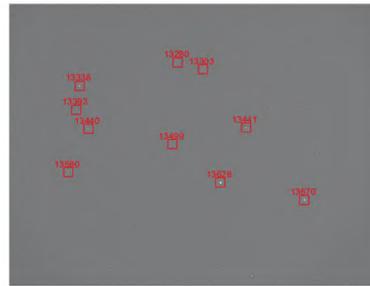


图8 真实星图识别结果

Fig. 8 Real star map recognition result

表4 星点提取与识别结果

Table 4 Star map extraction and recognition results

观测星号	质心坐标		导航星号
	x	y	
1	292.66	102.30	13280
2	336.68	113.66	13303
3	122.85	143.211	13338
4	116.50	185.49	13393
5	411.55	216.49	13441
6	137.67	218.29	13440
7	284.31	245.32	13499
8	102.68	293.66	13580
9	367.50	312.14	13628
10	513.14	342.41	13670

4 结束语

本文针对传统三角形算法在面对短波红外星表中恒星数据增多的情况下,因其匹配特征维度低,容易出现误匹配、冗余匹配的问题,提出了一种基于双高维特征组合的短波红外识别算法。该算法选取三角形的面积与外切圆半径作为匹配特征构建导航特征库,对生成的特征库构建面积特征的K矢量索引。为了提高三角形星图识别算法的成功率,提出一种观测三角形选择策略,显著减少了三角形特征匹配的尝试次数,进一步提高了算法的效率。识别时采用K矢量查找法实现

观测三角形初始匹配范围的快速定位,提高了识别速度,并在该范围内使用外切圆特征进行二次匹配,从而实现去冗余。仿真结果表明:星点位置噪声低于2像素时,算法的平均识别率优于96.5%;星图中假星比例低于50%时,平均识别率不低于87.6%;当星等噪声为1 Mv时,算法有着98%以上的平均识别率;在1像素的星点位置噪声、20%比例的假星干扰以及0.5 Mv的星等噪声的条件下,算法的平均识别时间为14.27 ms,平均识别率为95.5%,在识别时间与识别率上与改进三角形算法相比有着明显优势;最后通过实际星图识别试验验证了所提算法的实际可行性。通过试验可以看出,伪星点目标是影响星图识别算法准确率的主要因素之一,下一步将从星图预处理方面进行优化,以提高恒星位置测量精度,减少伪星点和坏像素的产生,进一步提高星图识别的准确率。

参考文献

- [1] YAN J Y, JIANG J, ZHANG G J. Dynamic imaging model and parameter optimization for a star tracker [J]. *Optics Express*, 2016, 24(6): 5961-5983.
- [2] ARDI N S, POETRO R E, SAIFUDIN M A, et al. Development of star pattern recognition algorithm for star sensor using combination of triangles pattern [C]//IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Bandung City: IOP Publishing, 2019: 012001.
- [3] ZHU H L, LIANG B, ZHANG T, et al. Designing considerations for airborne star tracker during daytime [C]//The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC). Qingdao: IEEE, 2015: 4279-4283.
- [4] WANG W J, WEI X G, LI J, et al. Noise suppression algorithm of short-wave infrared star image for daytime star sensor [J]. *Infrared Physics & Technology*, 2017, 85: 382-394.
- [5] TRUESDALE N A, SKEEN M, DILLER J, et al. DayStar: modeling the daytime performance of a star tracker for high altitude balloons [C]//The 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Grapevine: AIAA, 2013: AIAA 2013-0139.
- [6] WANG W J, WEI X G, LI J, et al. Guide star catalog generation for short-wave infrared (SWIR) all-time star sensor [J]. *Review of Scientific Instruments*, 2018, 89(7): 075003.
- [7] 王文杰, 张广军, 魏新国. 全天时星敏感器的建模分析与实验验证 [J]. *红外与激光工程*, 2019, 48(11): 142-148.
- [8] 梁斌, 朱海龙, 张涛, 等. 星敏感器技术研究现状及发展趋势 [J]. *中国光学*, 2016, 9(1): 16-29.
- [9] 张耿, 李崇辉, 张超, 等. 天文导航中短波红外星表交叉认证与优化 [J]. *兵工学报*, 2021, 42(11): 2368-2378.
- [10] 张广军, 魏新国, 江洁. 一种改进的三角形星图识别方法 [J]. *航空学报*, 2006, 27(6): 1150-1154.
- [11] TOLOEI A, ZAHEDNAMAZI M, GHASEMI R, et al. A comparative analysis of star identification algorithms [J]. *Astrophysics and Space Science*, 2020, 365(4): 63.
- [12] SKRUTSKIE M F, CUTRI R M, STIENING R, et al. The Two Micron All Sky Survey (2MASS) [J]. *The Astronomical Journal*, 2006, 131(2): 1163-1183.
- [13] SAFF E B, KUIJLAARS A B J. Distributing many points on a sphere [J]. *The Mathematical Intelligencer*, 1997, 19: 5-11.
- [14] MORTARI D, NETA B. K -vector range searching techniques [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2000, 105(1): 449-464.
- [15] 段辉, 张志利, 周召发, 等. 多矢量信息下的星敏感器三轴旋转角求解方法 [J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2022, 56(12): 2514-2522.
- [15] TICHAVSKY P, MURAVCHIK C H, NEHORAI A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(5): 1386-1396.
- [16] YAN J K, JIU B, LIU H W, et al. Prior knowledge-based simultaneous multibeam power allocation algorithm for cognitive multiple targets tracking in clutter [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(2): 512-527.
- [17] BLOM H A P, BAR-SHALOM Y. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(8): 780-783.
- [18] BHANAGE R, BORDE S, JOSHI K. Co-operative communication with SNR weighted algorithm in cognitive radios [C]//International Conference on Pervasive Computing (ICPC). Pune: IEEE, 2015: 1-4.

(上接第13页)