

文章编号:1006-2343(2024)04-001-06

基于动态设计域的结构基频拓扑优化方法

赵强威^{1,2}, 王冲¹, 王强龙^{1,2}, 左同星^{1,2}, 刘震宇^{*,1}

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033,

E-mail: zhaoqiangwei21@mails.ucas.ac.cn; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 在基于变密度法的传统结构基频拓扑优化中,会遇到局部模态的现象。根据实体材料阈值提取实体材料区域,有限元分析被限制在实体材料中进行,避免了局部模态的出现。利用图形的膨胀算子扩展出实体材料的虚拟边界,并利用滤波器将实体材料的敏感度延拓至虚拟边界,根据敏感度实现被移除材料的重现。动态设计域由实体材料和虚拟边界构成,并在迭代过程中根据背景网格信息动态重构设计域和有限元模型。此外,对于优化过程中可能出现的孤岛和非流形点等不稳定结构,通过火烧法识别并将其从实体材料中删除,进而稳定优化过程。所提方法被集成到 COMSOL 软件中,并通过几个数值算例,证明了所提方法的有效性。结果表明,所提方法能够有效的避免局部模态问题,获得稳定的收敛解。

关键词: 拓扑优化;基频;局部模态;实体材料;动态设计域

中图分类号: TH122 **文献标识码:** A

DOI:10.13952/j.cnki.jofmdr.2024.0133

Topology Optimization for Structural Fundamental Frequency Based on Dynamic Design Domain

ZHAO Qiangwei^{1,2}, WANG Chong¹, WANG Qianglong^{1,2}, ZUO Tongxing^{1,2}, LIU Zhenyu^{*,1}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130033, China;

2. University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The phenomenon of localized modes often occurs in the traditional topology optimization for structural fundamental frequency based on the density method. In this paper, the solid material region is extracted according to the solid material threshold, and finite element analysis is limited to the solid material to avoid the appearance of localized modes. The virtual boundary of the solid material is extended by the expansion operator of graphics; the sensitivity of the solid material is extended to the virtual boundary by the filter; and the reproduction of the removed material is realized according to the sensitivity. The dynamic design domain is composed of solid material and virtual boundary, and the design domain and finite element model are reconstructed dynamically according to the background grid information in the iterative process. In addition, unstable structures such as islands and non-manifold points that may appear in the optimization process are identified and removed from the solid material by fire-burning method to stabilize the optimization process. The proposed method is integrated into the COMSOL software, and several numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed method. The results show that the proposed method can effectively avoid the localized modes and obtain a stable convergence solution.

Key words: topology optimization; fundamental frequency; localized modes; solid material; dynamic design domain

拓扑优化^[1]是指在满足一定约束的前提下,在设计域内寻找材料的最佳分布使结构性能最优。在过去的几十年里,拓扑优化获得了研究人员的广泛关注,并形成了诸如固体各向同性材料惩罚法 (Solid Isotropic Material with Penalization,

SIMP)^[2]、渐进结构优化法 (Evolutionary Structural Optimization, ESO)^[3]、水平集法 (Level Set-based Method, LSM)^[4]和移动变形组件法 (Moving Morphable Components, MMC)^[5]等优化方法,并成功应用在了机械工程、建筑设计、航天工程等领域^[6-8]。

SIMP 方法是最广泛使用的优化方法之一。该方法将设计域内所有单元的相对密度作为设计变量,其取值在 0 到 1

收稿日期: 2023-12-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(62104227)

*: 通讯作者

之间,去描述给定设计域内的结构。在 SIMP 法中,设计域的网格在迭代过程中保持不变。为了描述单元对目标函数的贡献,有限元的分析域定义在固定的设计域上,即使有些低密度区域可能代表着孔洞。然而,在基于 SIMP 方法的动力学拓扑优化中,这种设置会导致出现数值问题,即实体材料的运动形式在低频下被低密度区域的局部振动所替代,这一现象被称为局部模态^[9]。

许多前期的研究工作都致力于解决局部模态问题。Pedersen^[10]指出局部模态出现的原因是低密度区域的刚度相对于质量过低,并提出可以通过调整低密度区域刚度和质量的惩罚来避免这一问题。Stolpe and Svanberg^[11]提出材料属性有理近似的插值模型(Rational Approximation of Material Properties, RAMP),被证明可以有效避免人工局部模态^[12]。Tchermiak^[13]将低密度区域的质量设置为零,但这会导致特征频率的高估。Du and Olhoff^[14]提出了低密度区域质量矩阵的连续插值模型,以避免数值奇异性。Huang 和 Xie^[15]提出了一种调整的 SIMP 模型,并将其应用于基于 BESO 方法的特征频率优化。Gao 等^[16]提出了移频与虚假模态识别相结合的方法去确定结构的真实模态。Bruns and Tortorelli^[17]提出将低密度区域从有限元分析中移除,并利用线性密度滤波的延拓能力将被移除的低密度单元重新引入。这种方法间接的消除了局部模态,但是重新引入被移除材料的能力不足。Behrou 等^[18]改进了 Bruns 的方法,提出使用 Heaviside 投影方法(Heaviside Projection Method, HPM)增强材料引入的能力,使其更快并且适合更复杂的问题。Luo 等^[19]提出了一种基于移动等面阈值(Moving ISO-surface Threshold method, MIST)的新算法,在该方法中,基于动态确定的阈值去将低密度单元从有限元分析中移除,并基于全部单元构造的响应函数,使被移除的单元能够重现。

传统的拓扑优化需要大量的编程工作来实现并进行数值分析,如有限元分析和灵敏度分析等。伴随着计算机领域的发展,基于 COMSOL、ABAQUS 等商业有限元软件的二次开发功能去实现拓扑优化受到研究人员的广泛关注,并逐渐成为一种重要的研究方式^[20-22]。这种研究方式通常需要将有限元软件与 MATLAB、Python 等编程软件联合使用,借助有限元软件强大的求解能力,完成正问题(即有限元求解)的分析,并将数据传递至编程软件,进而完成反问题(即优化问题)的计算。

基于上述的研究工作,本文提出一种改进的消除局部模态的方法。该方法仅考虑实体材料,并且有限元分析仅在实体材料区域进行,进而避免局部模态现象。进一步地,利用图形学的膨胀算子扩展实体材料的虚拟边界,体积约束被定义在实体区域和虚拟边界上,进而使被删除的材料能够更容易地被重新引入优化过程。此外,我们利用火烧法处理了优化过程中可能出现的非流形点、孤岛等不稳定结构。最后,搭建了所提方法的拓扑优化计算框架,并将其集成在了 COMSOL 软件中。对于连续体结构的基频最大化拓扑优化问题,通过二维和三维的数值算例验证了所提方法的有效性。

1 结构基频最大化拓扑优化列式

1.1 拓扑优化模型和材料插值模型

在动力学拓扑优化中,一个经典的问题是最大化线弹性结构的基频,这一经典问题在防止工程结构发生低频共振上有着重要应用。考虑无阻尼的情况,则该优化问题可以被写作:

$$\left. \begin{aligned} \max_{\rho_1, \dots, \rho_N} : f_1 &= \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\pi} \\ \text{subject to:} \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1 &= \lambda_1 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_1 &= 1 \\ \sum_{e=1}^N \rho_e V_e - V^* &\leq 0, \quad V^* = \alpha V_0 \\ 0 < \rho_{\min} &\leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: λ_1 和 f_1 分别是线弹性结构的一阶特征值和基频; $\boldsymbol{\phi}_1$ 是相应的特征向量; $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 是对称且正定的全局刚度矩阵和质量矩阵;设计变量 ρ_e 是第 e 个单元的相对密度, V_e 代表第 e 个单元的体积分, V_0 是许可设计域的全部体积, α 是体积分数; $\rho_{\min}$ 是设计变量的最小值,用来代表孔洞单元,为避免刚度矩阵奇异,通常被取为 0.001。

本文采用 SIMP 插值模型,表达式为:

$$\left. \begin{aligned} E &= [E_v + \rho_e^p (E_s - E_v)] \\ \rho &= [\rho_v + \rho_e (\rho_s - \rho_v)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: E_v 和 ρ_v 分别是空洞单元的杨氏模量和密度; E_s 和 ρ_s 分别是实体单元的杨氏模量和密度; p 是惩罚因子。

1.2 灵敏度分析和过滤

为了方便,本文仅考虑单重特征值的情况。对式(1)中控制方程直接微分,得到 λ_1 相对于设计变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{\phi}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \boldsymbol{\phi}_1 \quad (3)$$

根据链式法则得到 f_1 相对于设计变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1} \partial \rho_e} \quad (4)$$

本文采用灵敏度滤波^[23]的方法去避免优化过程中可能出现的棋盘格模式和网格依赖性等数值不稳定现象,过滤后的灵敏度为:

$$\overline{\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e}} = \frac{\sum_{i \in N_e} w(x_i) \rho_i \frac{\partial f_1}{\partial \rho_i}}{\max(10^{-3}, \rho_e) \sum_{i \in N_e} w(x_i)} \quad (5)$$

式中: N_e 是由过滤半径 $r_{\min}$ 确定的单元 e 的邻域集合,由方程(6)表示。 x_i 是单元 i 的中心坐标, $w(x_i)$ 是由方程(7)给出的权重函数。

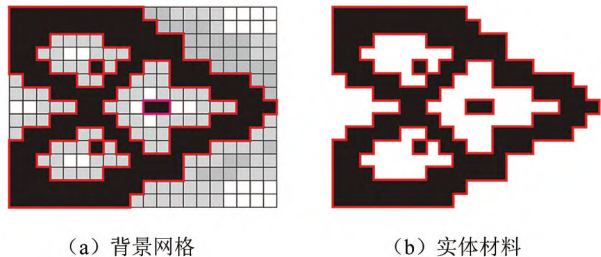
$$N_e = \{i \mid \|x_i - x_e\| \leq r_{\min}\} \quad (6)$$

$$w(x_i) = r_{\min} - \|x_i - x_e\| \quad (7)$$

2 基于动态设计域的拓扑优化方法

本文所提方法使用了额外的一个网格,即背景网格,用来存储全部设计域中的单元、单元节点和设计变量的信息。许多研究表明^[24],在 $\rho_e \leq 0.1$ 的低密度区域会出现局部模

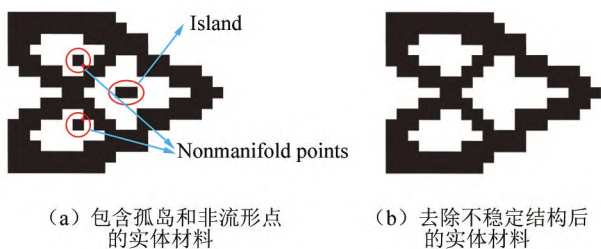
态。因此,本文以 $\rho_{th} = 0.1$ 作为设计域的分区阈值,从背景网格中提取出拓扑的实体材料区域,如图1所示,其中单元的灰度表示设计变量的大小,红色轮廓代表 $\rho_{th} = 0.1$ 的阈值线。



▲图1 提取背景网格中的实体材料

2.1 不稳定结构的处理

在拓扑优化过程中,实体材料区域中有时会存在一些不稳定的结构,如孤岛 (Island) 和非流形点 (Nonmanifold points) [25-27],如图2(a)所示。这种结构局部刚度很弱,会使实体区域的整体结构不稳定,进而导致在求解特征值时会出现数值问题。因此,这两种结构在优化中应该被删除,如图2(b)所示。



▲图2 去除实体材料中的不稳定结构

火烧法是一种基于单元邻接关系提取结构子域信息的算法,需要根据单元的边、线或面的邻接关系建立邻接矩阵[28]。在本文中,我们根据单元的边(二维)或面(三维)的邻接关系建立邻接矩阵,进而通过火烧法获得实体区域的子域信息 $S = \{S_n | n = 1, 2, \dots\}$ 。如果子域 S_i 中包含负载或受约束的单元,则被认为是实体区域中的主结构 S_M ; 否则为不稳定的结构 S_U 。进一步地,将 S_U 中所有单元的设计变量赋值为0,以将其从实体区域中删除。表1给出了这一过程

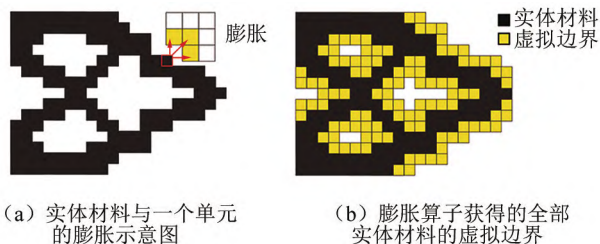
表1 不稳定结构的处理算法

Algorithm 1	
1.	实体材料的单元集合 S , 所有背景网格单元的节点编号 Face, 边界条件对应的单元节点编号 ID_BC。
2.	根据 S 中单元的邻接关系建立邻接矩阵 A , 若单元 i 与单元 j 邻接, 则 A 中元素 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。
3.	火烧法提取实体材料的子域信息 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, S_n 包含了子域的所有单元编号。
4.	for $i = 1:n$
5.	提取子域 S_i 中所有单元的节点编号 IDs
6.	if $IDs \cap ID_BC \neq \emptyset$
7.	则 S_i 被认为是主结构, $S_M = S_M \cup S_i$
8.	else
9.	S_i 为不稳定的结构, 令 $\rho_e \in S_i \rightarrow 0$, 将其从实体区域中删除。且 $S_U = S_U \cup S_i$ 。
10.	End
11.	更新实体材料信息, $S = S_M$
12.	End

的伪代码。

2.2 虚拟边界的定义

在该方法中,我们将体积约束定义在全部设计域上,而将有限元分析定义在实体材料区域,以避免可能出现的局部模态。为了增加单元的引入能力,在每一次迭代中,利用图形学的膨胀算子,扩展出实体材料的虚拟边界,并以0.001的设计变量值被引入优化。图3展示了由一层单元构成的虚拟边界。



▲图3 实体材料与虚拟边界

动态设计域由实体材料和虚拟边界构成,并在每次迭代中更新。虚拟边界上,目标函数对设计变量的灵敏度信息利用滤波器从实体材料边界处延拓得到,如图4所示。设计变量的更新采用基于梯度的算法,如移动渐近线法 (The Method of Moving Asymptotes, MMA) [29]。

2.3 拓扑优化实现流程

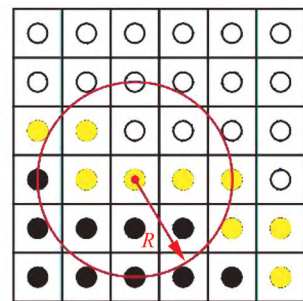
根据上述的讨论,本文所提方法被概述如图5所示,优化流程如下:

- (1) 定义初始设计域和背景网格,初始化优化参数。
- (2) 获取优化初始值,提取背景网格和边界条件信息。
- (3) 根据分区阈值 $\rho_{th} = 0.1$ 提取实体区域,处理不稳定的结构。
- (4) 重构实体材料的有限元模型,并利用膨胀算子获得其虚拟边界。分别提取相应单元对应的设计变量。
- (5) 有限元分析和灵敏度分析,其中有限元分析仅被定义在实体材料上,而体积约束被同时定义在实体材料和虚拟边界上。
- (6) 灵敏度过滤。
- (7) 采用 MMA 更新设计变量。
- (8) 如果收敛则停止优化,否则进行下一步。本文的收敛条件为:

$$\|\mathbf{x}_e^{k+1} - \mathbf{x}_e^k\|_\infty \leq \varepsilon \quad (8)$$

式中: ε 为收敛容差,本文取0.01。为避免无休止的迭代,本文设置了最大迭代次数 maxIter。

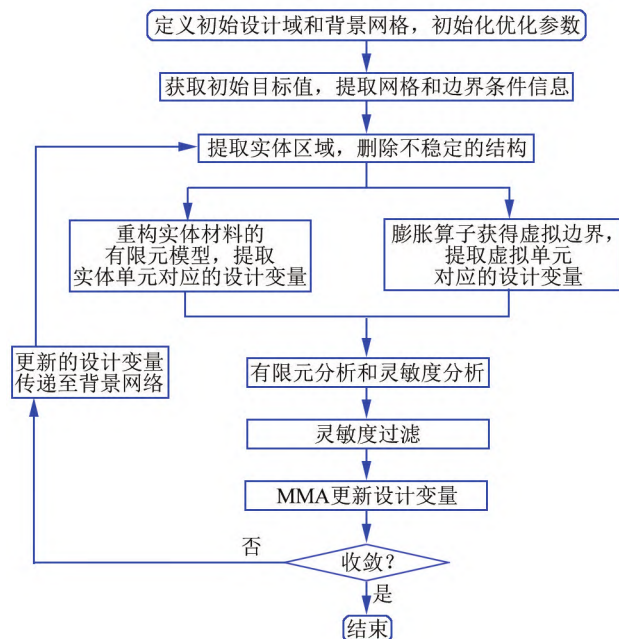
- (9) 将更新的设计变量传递并存储至背景网格,并重复



▲图4 利用滤波器将实体材料的灵敏度延拓至虚拟边界

步骤 (1) ~ (9)。

优化流程图如图 5 所示。



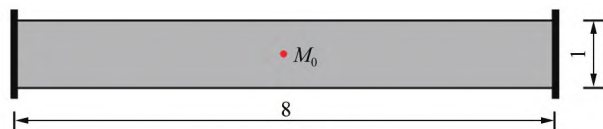
▲图 5 优化流程

3 数值算例

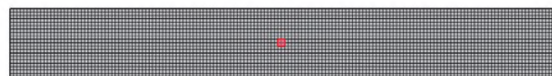
分别采用二维和三维的算例验证所提方法的有效性,其中实体材料弹性模量 $E_s = 2 \times 10^{11}$ Pa, 空洞材料弹性模量 $E_v = 1 \times 10^{-9}$ Pa, 实体材料密度 $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$, 空洞材料密度 $\rho_v = 1 \times 10^{-9} \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.33$ 。实体材料阈值 $\rho_{th} = 0.1$, 虚拟边界由两层单元构成。本文所有算例均在 COMSOL 的二次开发环境下完成。算例 1 验证了所提方法能有效避免局部模态, 算例 2 验证了其在三维下的有效性。

3.1 2D 固支梁

算例 1 为典型的二维固支梁拓扑优化问题, 初始最大设计域为 $8 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 的矩形。两端受到固定约束, 中心处被放置一个大小为 $M_0 = 6280 \text{ kg}$ 的集中质量, 如图 6 所示。整个结构被划分为 160×20 个正四边形网格。材料体积分数为初始设计域的 50%, 过滤半径为 0.1 m , SIMP 惩罚参数为 3, 优化最大迭代步 $\text{maxIter} = 100$ 。



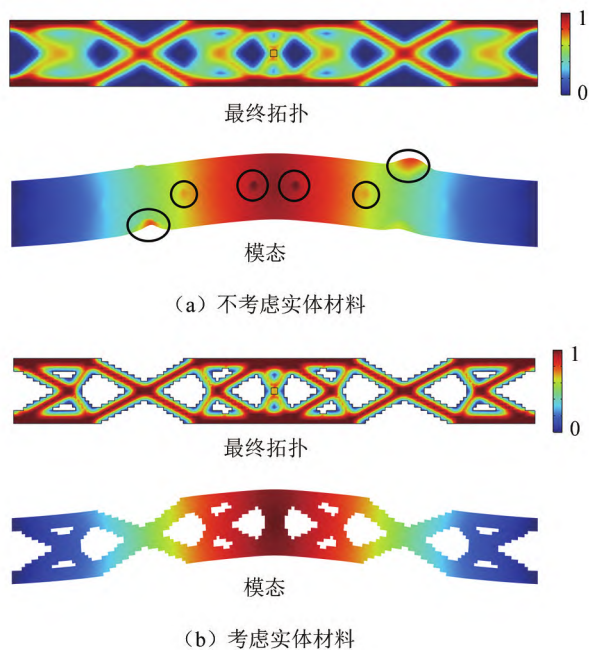
(a) 几何模型



(b) 初始网络模型, 160×20 个单元

▲图 6 两端固支梁的几何模型和初始网格模型

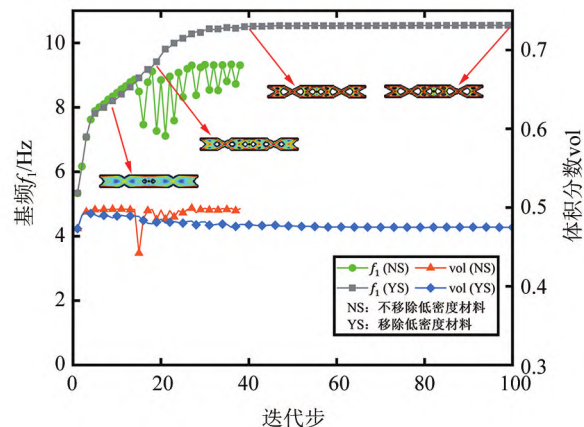
图 7 分别给出了优化停止时的最终拓扑和相应的模态。从图 7(a) 中可以看到, 当不考虑实体材料时, 最终拓扑



▲图 7 两端固支梁的优化结果与一阶模态

中存在大量的中间密度, 且对应的模态中存在 6 处明显的局部模态(用黑色圈出)。图 7(b) 给出了仅考虑实体材料的结果, 可以看出, 最终拓扑的收敛性相比于不考虑实体材料得到了很大的提升, 且对应的模态中不存在局部模态。值得注意的是由于优化仅在 $\rho_{th} > 0.1$ 的区域中进行, 因此, 即使最终拓扑中存在部分中间密度, 仍能获得一个清晰的几何构型, 而相应的模态反应了该构型的动态特性。

图 8 给出了优化的迭代历史。



▲图 8 两端固支梁的基频和体积分数的迭代历史

当不考虑实体材料时, 最终拓扑的基频为 9.31 Hz , 但是由于反复出现的局部模态, 优化过程存在明显的振荡, 并导致优化提前终止。当考虑实体材料时, 在有限元分析中逐渐移除低密度单元, 避免了局部模态的出现, 最终拓扑的基频为 10.55 Hz 。由于低密度区域的移除, 体积分数降低至 0.475 。

3.2 3D 梁结构

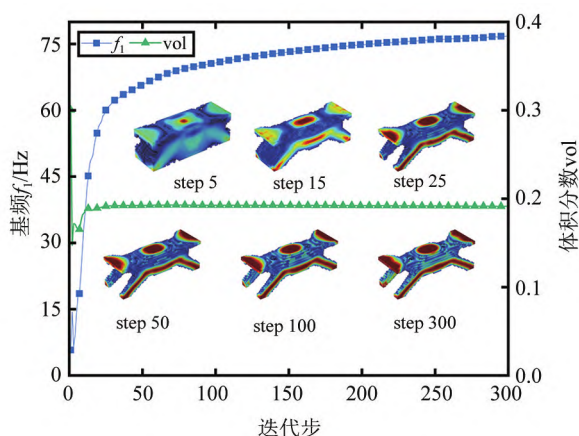
该算例为三维梁结构, 初始最大设计域为 $3 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 的矩形。左右两端加粗的上下边受到固定约束, 上表面

中心处的红色区域被放置一个大小为 $M_0 = 11\ 775\ \text{kg}$ 的集中质量,如图9所示。

整个结构被划分为 $20 \times 20 \times 60$ 个正六面体网格。材料体积分数为初始设计域的20%,过滤半径为0.1 m, SIMP 惩罚

参数为4,优化最大迭代步 $\text{maxIter} = 300$ 。

图10给出了优化的迭代历史和不同迭代步的输出拓扑。



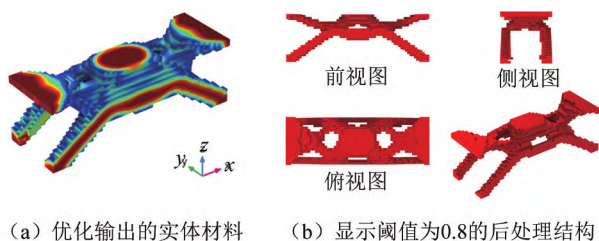
▲图10 三维梁结构的基频、体积分数和结构演化的迭代历史

结果表明,在25步之前,拓扑的演化主要体现为底部和两侧单元的删除。在25步之后,拓扑构型的变化很小,基频的提高主要由于设计变量趋向于“1”导致。根据迭代曲线可以看出,所提方法在三维问题中仍有很好的鲁棒性和收敛性。该算例在 Intel © Core™ i9 – 10900K CPU @ 3.70 GHz, 48 GB of RAM, Windows 10 (64-bit x86) 的台式机上运行,表2给出了图10中不同迭代步的计算时间。结果表明,随着优化的进行,设计域逐渐缩减,计算时间也逐渐减少,第100步相对于第5步减少了38%。

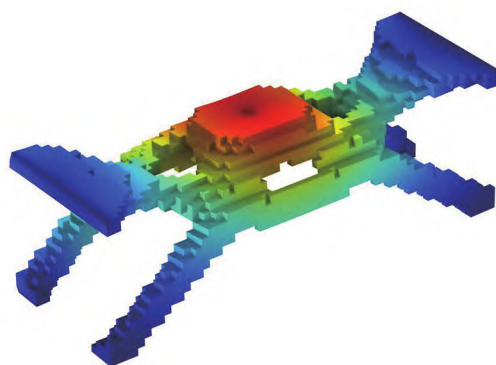
表2 不同迭代步的计算时间

迭代步	5	15	25	50	100	300
计算时间 /s	29.5	20.0	19.0	18.5	18.3	18.0

图11给出了三维梁结构的最终拓扑。将显示单元密度阈值取为0.8,得到的最优结构如图11(b)所示,该结构的基频为73.86 Hz,所对应的一阶模态如图12所示。



▲图11 三维梁结构的最终拓扑



▲图12 最优结构的一阶模态

4 结论

基于 SIMP 框架的传统拓扑优化方法在固定设计域上进行,在处理如结构基频最大化等动力学问题时会遇到局部模态的现象,这会严重干扰优化过程。为了避免这一现象,本文提出了基于动态设计域的结构拓扑优化方法。该方法仅考虑拓扑的实体材料部分,其根据阈值从背景网格中提取,并利用膨胀算子获得实体材料区域周围的虚拟边界。动态设计域由实体材料区域和虚拟边界组成,并在每次迭代中重构。有限元分析和目标函数的灵敏度分析被限制在实体材料区域中,避免了局部模态的出现。目标函数的灵敏度通过滤波器延拓至虚拟边界,同时体积约束被定义在动态设计域上。设计域拓扑的更新依赖于梯度信息,而得益于虚拟边界的动态更新,被删除的材料能够容易被重新引入优化。结果表明,所提方法能有效避免局部模态现象,并获得合理的结构。

拓扑优化的价值不仅仅体现在最终的拓扑构型上,优化过程中拓扑的演化信息同样值得关注。对于三维问题,材料布局的演化往往出现在设计域的内部。所提方法的输出结果仅为实体材料,这允许设计者能够更直观的获取优化过程中拓扑变化的信息,从而获得更多的设计灵感。此外,由于有限元计算域的减小,该方法的计算效率得到了显著提升,对于大规模问题有潜在的应用价值。

参考文献

- [1] 杜建斌. 结构优化及其在振动和声学设计中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [2] BENDSØE M P, SIGMUND O. Topology optimization: theory, methods and applications [M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [3] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. Computers & Structures, 1993, 49 (5): 885–896.
- [4] WANG M Y, WANG X, GUO D. A level set method for structural topology optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192 (1): 227–246.
- [5] GUO X, ZHANG W, ZHANG J, et al. Explicit structural topology optimization based on moving morphable components (MMC) with curved skeletons [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, 2016, 310: 711–748.
- [6] 栾云杰, 程路超, 王强龙, 等. 轴承刚度对光测设备跟踪架谐振频率影响[J]. 机械设计与研究, 2023, 39(3): 135–138.
- [7] 孟亮, 仲明哲, 李文彪, 等. 面向增材制造的航空发动机外部系统支架拓扑优化设计[J]. 中国机械工程, 2022, 33(23): 2822–2832.
- [8] MENG L, ZHANG W, QUAN D, et al. From topology optimization design to additive manufacturing: today's success and tomorrow's roadmap[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2020, 27(3): 805–830.
- [9] 何经杰. 考虑特征值的结构动力学和声子晶体拓扑优化[D]. 辽宁大连: 大连理工大学, 2021.
- [10] PEDERSEN N L. Maximization of eigenvalues using topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2000, 20(1): 2–11.
- [11] STOLPE M, SVANBERG K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 22(2): 116–124.
- [12] SIGMUND O, MAUTE K. Topology optimization approaches[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(6): 1031–1055.
- [13] TCHERNIAK D. Topology optimization of resonating structures using SIMP method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54(11): 1605–1622.
- [14] DU J, OLSHOFF N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 34(2): 91–110.
- [15] HUANG X, XIE Y M. Natural frequency optimization of structures using a soft-kill BESO method[J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2010, 10(1): 012191.
- [16] GAO X, MA H. Topology optimization of continuum structures under buckling constraints[J]. Computers & Structures, 2015, 157: 142–152.
- [17] BRUNS T E, TORTORELLI D A. An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(10): 1413–1430.
- [18] BEHROU R, LOTFI R, CARSTENSEN J V, et al. Revisiting element removal for density-based structural topology optimization with reintroduction by heaviside projection[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 380: 113799.
- [19] LUO Q, TONG L. An algorithm for eradicating the effects of void elements on structural topology optimization for nonlinear compliance[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(4): 695–714.
- [20] KOOK J, CHANG J H. A high-level programming language implementation of topology optimization applied to the acoustic-structure interaction problem[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 64(6): 4387–4408.
- [21] 唐玉峰, 施胤成, 李文利, 等. 应用于反射镜支撑结构拓扑优化的共形正交基底[J]. 光学学报, 2023, 43(13): 232–242.
- [22] HE Y, ZHAO Z L, LIN X, et al. A hole-filling based approach to controlling structural complexity in topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 416: 116391.
- [23] XU S, CAI Y, CHENG G. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 41(4): 495–505.
- [24] LUO Q, TONG L. Elimination of the effects of low density elements in topology optimization of buckling structures[J]. International Journal of Computational Methods, 2016, 13(6): 1650041.
- [25] WANG C, ZUO T, HAN H, et al. 2D minimum compliance topology optimization based on a region partitioning strategy[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2023, 136(1): 655–683.
- [26] ZUO T, WANG C, HAN H, et al. Explicit 2D topological control using SIMP and MMA in structural topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(10): 293.
- [27] LIANG Y, YAN X, CHENG G. Explicit control of 2D and 3D structural complexity by discrete variable topology optimization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 389: 114302.
- [28] WANG Q, HAN H, WANG C, et al. Topological control for 2D minimum compliance topology optimization using SIMP method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(1): 38.
- [29] SVANBERG K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359–373.
- 作者简介: 赵强威(1999—), 男, 硕士研究生; 主要研究方向为结构拓扑优化方法。

庆祝《机械设计与研究》创刊40周年!

不忘初心, 再接再厉, 将《机械设计与研究》办得更新!

衷心感谢广大读者给予《机械设计与研究》的关心与支持!