

# 偏置铰链并联机构工作空间灵敏性分析与优化\*

张煜<sup>1,2,3</sup>, 于阳<sup>1,3</sup>, 王学问<sup>1,2,3</sup>, 徐振邦<sup>1,2,3</sup>, 孙嘉霖<sup>1,3</sup>

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033; 2. 中国科学院大学材料与光电研究中心, 北京 100049; 3. 中国科学院空间光学系统在轨制造与集成系统重点实验室, 长春 130033)

**摘要:**为解决偏置铰链并联机构工作空间难以直观评估和设计的问题,基于构型参数对其工作空间进行灵敏性分析,提出了一种工作空间寻优方法。首先,以 6-RRRPRR 构型并联机构为研究对象,推导出该机构的逆向运动学和雅可比矩阵;然后,基于数值法建立了机构的工作空间,针对位置工作空间不规则的问题,获取了其有效工作空间,在此基础上,对机构工作空间进行了参数灵敏性分析;最后,结合工程实例提出了一种工作空间寻优方法,可以依据设计条件寻找符合机构运动要求的构型参数组合,便于工程应用。

**关键词:**偏置铰链;有效工作空间;灵敏性分析;寻优方法

**中图分类号:**TH112;TG659 **文献标识码:**A

## Analysis and Optimization of the Aensitivity of the Workspace of an Offset Hinge Parallel Mechanism

ZHANG Yu<sup>1,2,3</sup>, YU Yang<sup>1,3</sup>, WANG Xuewen<sup>1,2,3</sup>, XU Zhenbang<sup>1,2,3</sup>, SUN Jialin<sup>1,3</sup>

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China; 2. Research Center for Materials and Optoelectronics, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the workspace of parallel mechanisms with offset hinges is difficult to evaluate and design intuitively, A sensitivity analysis of its workspace based on configuration parameters and a workspace optimisation method is proposed. First, taking the 6-RRRPRR configuration parallel mechanism as a research object, the inverse kinematics of the mechanism and the Jacobi matrix are derived. Then, the effective workspace of the mechanism is established based on the numerical method, the effective workspace of the position was obtained for the problem of irregularity of its workspace. On this basis, a parametric sensitivity analysis of the workspace of the mechanism was carried out. Finally, a workspace optimisation method is proposed with engineering examples. It is easy to find a combination of configuration parameters that meets the movement requirements of the mechanism according to the design conditions, which is convenient for engineering applications.

**Key words:** offset hinges; effective workspace; sensitivity analysis; optimization-seeking methods

## 0 引言

与串联机构相比,并联机构具有结构紧凑、刚度高、承载能力强、无累积误差、运动精度高等优点<sup>[1]</sup>,并联机构在各种方面弥补了串联机构的缺点,已成为当下研究与应用的热点<sup>[2]</sup>。并联机构的构型形式有 6-UPU、6-SPS、6-UPS 以及 6-UCU 等,其中 U、P、S、C 代表虎克铰、移动副、球铰、圆柱副<sup>[3]</sup>。当前并联机构性能正向着高稳定性与高刚度发展,尤其在军工、天文等领域的光学望远镜进行高质量成像时,高精密的并联调整机构对其次镜系统的位姿调整尤为关键<sup>[4]</sup>。铰链作

为并联机构中的关键部件,其决定了并联机构的整体刚度与精度性能的优劣,球形铰链由于其运动间隙较大使得球形铰链的可应用领域受到限制,相比球铰而言,虎克铰的刚度以及精度得到了提升,但虎克铰工作空间相比球铰会变小且虎克铰的十字交叉轴的加工难度也较大,这使得虎克铰存在了明显的缺点。为了优化虎克铰的工作空间,同时进一步提升铰链的刚性,GLOESS 等<sup>[5]</sup>提出了偏置虎克铰链,偏置铰链由于其转动空间大、刚度性能更加优异的特点,使得 Hexapod 并联机构具有更好的刚度、稳定性和运动能力。目前,

收稿日期:2023-11-16;修回日期:2024-01-10

\* 基金项目:国家自然科学基金项目(62235018);吉林省科技发展计划项目(20220204116YY)

作者简介:张煜(1999—),男,硕士研究生,研究方向为六自由度并联机构的结构优化、运动学与动力学,(E-mail) zhangyu21j@126.com;通信作者:于阳(1987—),男,副研究员,研究方向为空间智能机器人、多维精密调整机构等设计,(E-mail) yuyang@ciomp.ac.cn。

引用本文:张煜,于阳,王学问,等.偏置铰链并联机构工作空间灵敏性分析与优化[J].组合机床与自动化加工技术,2024(11):83-89.

ZHANG Yu, YU Yang, WANG Xuewen, et al. Analysis and optimization of the aensitivity of the workspace of an offset hinge parallel mechanism [J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2024(11): 83-89.

偏置铰链并联机构的应用已经非常广泛,如 Hexapod 平台<sup>[6]</sup>采用了偏置铰链的形式,YU、HAN 等<sup>[7-8]</sup>针对空间光学望远镜的高质量成像研制了多款基于偏置铰链的并联机构,孙佳霖<sup>[9]</sup>也研制了一款基于大型望远镜次镜系统的轴偏置虎克铰型 Hexapod 平台实验样机,此外包括一些定制的平台大都采用偏置铰链的结构形式并且已投入到军工、商业、天文等领域中使用,可见偏置铰链并联机构具有十分广阔的应用前景,因此对偏置铰链并联机构的运动性能进行分析与研究显得尤为重要。

工作空间是评价并联机构运动能力的重要性能指标<sup>[10]</sup>。优化和设计工作空间可以改善机构的运动性能,因此,对其进行研究十分必要。刘秀莹等<sup>[11]</sup>提出了一种具有高匹配度踝关节串联拟合模型,并采用遗传算法对工作空间进行优化。于金山等<sup>[12]</sup>计算了并联机构对在轨装配任务时的力螺旋可行工作空间,以工作空间体积为指标筛选出了最佳构型。武晓轩等<sup>[13]</sup>以 2UU-UPU 并联机构为对象,分析了结构参数对工作空间体积的影响曲线。杨超等<sup>[14]</sup>提出了 DELTA 并联机构的规则工作空间,并进行了多目标优化分析。上述研究分别针对不同类型机构的工作空间进行了优化和分析。然而,带有偏置铰链的并联机构工作空间不规则并且难以直观评估和设计是一直存在的研究难点与重点,会导致满足理想工作空间的机构构型参数难以确定,并且一直未能得到解决。

为了解决偏置铰链并联机构工作空间难以直观评估和设计的问题。本文以 6-RRRPRR 构型的并联机构为研究对象,推导出该机构的逆向运动学和雅可比矩阵。然后基于数值法建立了机构的工作空间,针对位置工作空间不规则的问题,获取了其有效工作空间。在此基础上,对机构的有效工作空间与姿态工作空间进行了参数灵敏性分析,绘制了构型参数对工作空间体积的影响曲线,可以更加直观地评估工作空间体积变化规律。最后,结合工程实例提出了一种工作空间寻优方法,依据设计条件寻找符合机构运动要求的构型参数,便于工程应用。

## 1 并联机构与逆向运动学

### 1.1 并联机构零位刚度最优设计

传统偏置铰链的并联机构在构型确定时,上下平台需要特殊加工斜坡形式来满足支腿初始位置呈现直线的状态,这种构型对机械加工要求较高。本文提出一种零位刚度最优的构型设计。如图 1 所示,并联机构的支腿呈直线,铰链轴与上下平台呈平行的状态。

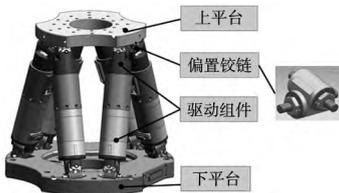


图 1 并联机构模型

### 1.2 逆向运动学

由于此类形式的并联机构引入了偏置铰链,求解

其运动学要比带有普通铰链的并联机构更加复杂,于阳<sup>[15]</sup>通过数值迭代方法求解了逆运动学。

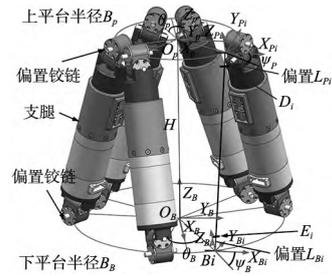


图 2 结构简图

建立坐标系如图 2 所示。动坐标系在定坐标系的位置用向量  $q = [p, t]^T$  表示,  $p = [x, y, z]^T$  为动坐标系原点  $O_p$  在定坐标系中的位置,  $t = [\gamma, \beta, \alpha]^T$  为动坐标在定坐标系中的姿态角。点  $D_i$  表示与上平台相连的偏置铰链中靠近支腿的铰链轴中心,  $E_i$  表示与下平台相连的偏置铰链中靠近支腿的铰链轴中心。支腿  $L_i$  在坐标系  $B_i-X_{B_i}Y_{B_i}Z_{B_i}$  和  $P_i-X_{P_i}Y_{P_i}Z_{P_i}$  中表示为:

$${}^{0_B}D_i E_i = {}^{B_i}T_{O_B} {}^{0_B}T_{O_p} {}^{O_p}T_{P_i} {}^{P_i}D_i - {}^{B_i}E_i \quad (1)$$

$${}^{0_P}D_i E_i = {}^{P_i}D_i - {}^{P_i}T_{O_p} {}^{O_p}T_{O_B} {}^{0_B}T_{B_i} {}^{B_i}E_i \quad (2)$$

其中,动坐标系  $O_p-X_p Y_p Z_p$  相对于定坐标系  $O_B-X_B Y_B Z_B$  的旋转变换通过传递矩阵表示。

$${}^{0_B}T_{O_p} = \begin{bmatrix} c\gamma c\beta & c\gamma s\beta\alpha - s\gamma c\alpha & c\gamma s\beta\alpha + s\gamma s\alpha & x \\ s\gamma c\beta & s\gamma s\beta\alpha + c\gamma c\alpha & s\gamma s\beta\alpha - c\gamma s\alpha & y \\ -s\beta & c\beta\alpha & c\beta c\alpha & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

${}^{B_i}E_i$  和  ${}^{P_i}D_i$  分别在坐标系  $B_i-X_{B_i}Y_{B_i}Z_{B_i}$  和  $P_i-X_{P_i}Y_{P_i}Z_{P_i}$  中表示为:

$${}^{B_i}E_i = [0 \quad L_{B_i} \cdot c\phi_{B_i} \quad L_{B_i} \cdot s\phi_{B_i} \quad 1]^T \quad (4)$$

$${}^{P_i}D_i = [0 \quad L_{P_i} \cdot c\phi_{P_i} \quad L_{P_i} \cdot s\phi_{P_i} \quad 1]^T \quad (5)$$

将式(4)和式(5)分别代入式(1)和式(2),处理后利用 Newton-Raphson 数值迭代方法求解。并联机构逆运动学的求解流程如图 3 所示,  ${}^0\phi_{B_i}$  和  ${}^0\phi_{P_i}$  ( $i = 1 \sim 6$ ) 分别为上、下偏置铰链输入角初值。

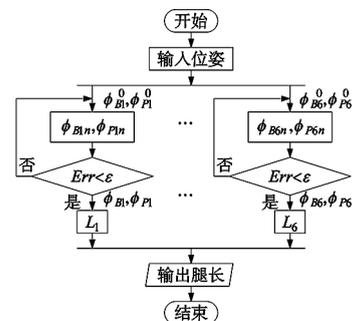


图 3 逆向运动学流程

关于偏置铰链并联机构的雅可比矩阵,张扬<sup>[16]</sup>利用微分变换的思想分析了带有偏置铰链的并联机构上平台与支腿的速度雅可比矩阵  $J$ 。

$$\dot{q}_t = J \cdot \dot{q}_j \quad (6)$$

式中:  $\dot{q}_t$  为动平台的随体运动速度,  $\dot{q}_j$  为主动关节的速度。

## 2 工作空间分析

并联机构工作空间是指动平台能到达的空间范围,包括位置工作空间和姿态工作空间<sup>[17-18]</sup>。

### 2.1 位置工作空间分析

(1)位置工作空间计算。在固定姿态状态下,考虑了限制工作空间的约束问题,利用运动学逆解和极坐标搜索法对并联机构的位置工作空间进行计算<sup>[19]</sup>。首先以表1所示并联机构构型参数绘制工作空间。

表1 并联机构初始参数

$R_p/mm$	$R_B/mm$	$H/mm$	$\theta_p/(^\circ)$	$\theta_B/(^\circ)$
90	140	245	15	15

设计支腿伸长量在 $\pm 15\text{ mm}$ ,绘制出姿态为 $(0, 0, 0)$ 下的位置工作空间三维图形如图4a所示,图4b~图4d表示不同角度下视图。图4e和图4f显示在不同 $Z$ 向位移下,并联机构在 $XOY$ 面上的工作空间。可以看出并联机构在不同 $Z$ 向高度下的工作空间外部轮廓形状存在较大差异。

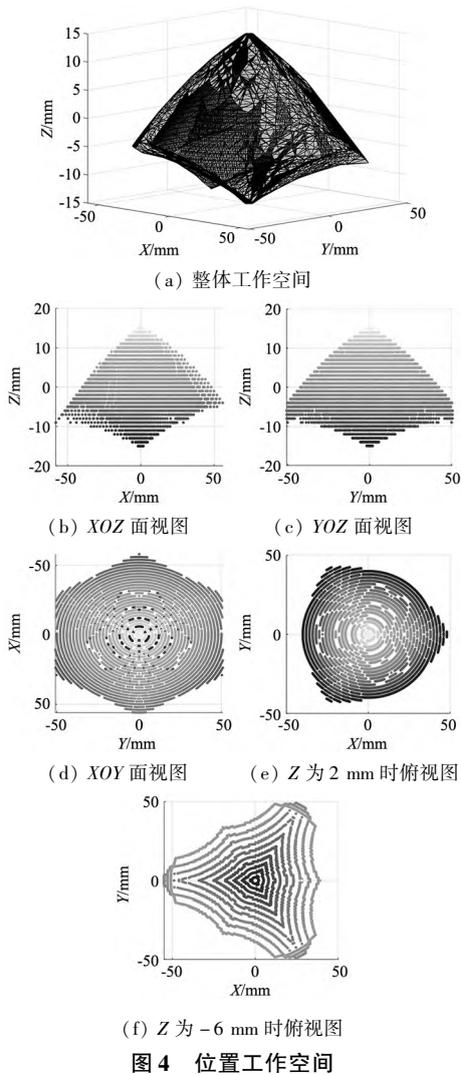


图4 位置工作空间

(2)有效工作空间的获取。如图4所示,并联机构工作空间内部连续且无空洞,但不规则。在实际应用中,不规则的工作空间很难进行评估。而姿态为 $(0, 0, 0)$ 下的位置工作空间也是衡量并联机构运动性能的重要指标,在众多场景中均有应用<sup>[20-21]</sup>。

若在求得的工作空间内选出较规整的部分,这样更加便于进行分析应用。基于上述分析,在位置工作空间中,将不同 $Z$ 向高度下最大内切圆所组成的空间

作为并联机构的规则工作空间,并将这个较规整的工作空间作为有效工作空间。如图5所示为并联机构位置工作空间与有效工作空间对比图,经处理后得到的有效工作空间更加直观,易于分析。

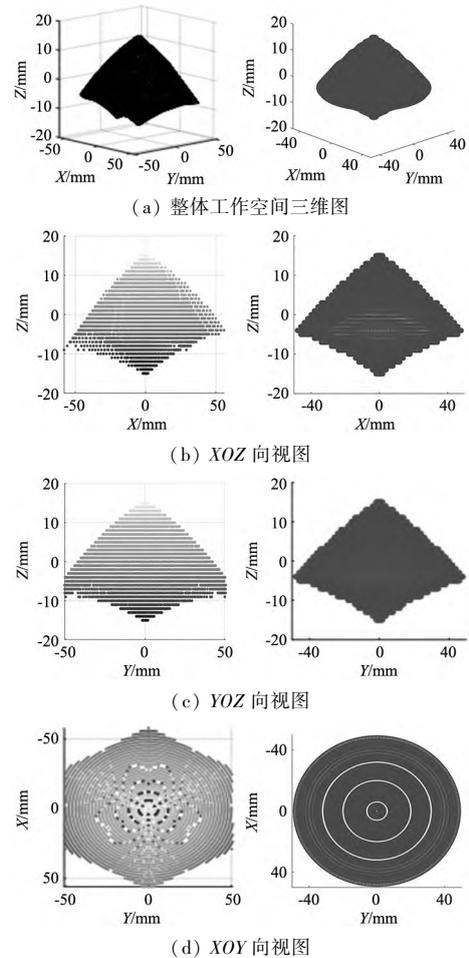


图5 位置工作空间对比(左侧为位置工作空间;右侧为有效工作空间)

另外,本文提出的有效工作空间去除了机构边界一些不规则的工作空间,图6是有效工作空间在位置工作空间内的占比。

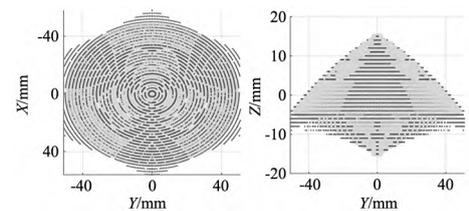


图6 有效工作空间占比

将有效工作空间体积公式表示为:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1}) \cdot \Delta z \quad (7)$$

式中: $V$ 表示有效工作空间体积, $A_i$ 表示第 $i$ 层的最大内切圆面积, $\Delta z$ 表示层高区间。

### 2.2 姿态工作空间求解

并联机构的位置处于零位时的姿态工作空间大小是一项非常重要的指标,在飞行模拟器、汽车模拟器<sup>[22-23]</sup>等领域应用广泛。如图7所示为机构在位置为 $(0, 0, 245)$ 下的姿态工作空间。

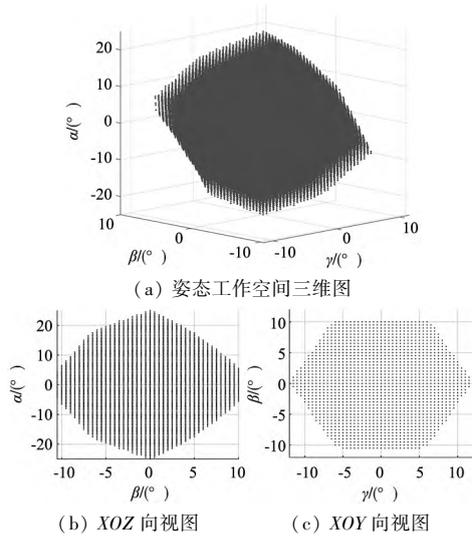


图 7 姿态工作空间

另外,姿态工作空间体积求解公式与有效工作空间求解公式形式相同,不同之处是所求  $A_i$  不是每一层的最大内切圆,而是每一层规则图形的面积。

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \cdot \Delta z \quad (8)$$

### 3 构型参数灵敏性分析

增大支腿伸长量以及提高铰链的转角能力,均可以提高并联机构的工作空间,于阳<sup>[15]</sup>对此方面进行过研究。而并联机构构型参数对工作空间体积的影响规律也对设计并联机构具有非常重要的作用,因此本节对其进行了研究。偏置铰链并联机构构型参数包括  $R_p$ 、 $R_B$ 、 $H$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_B$  和  $e$ 。为使本节中参数灵敏性分析得到的结论更具普适性,在支腿伸缩量与铰链转角约束相同的条件下,分别从支腿腿长随参数变化、支腿腿长不随参数变化两个角度进行灵敏性分析。由于偏置铰链的偏置量  $e$  较为特殊,因此将其单独进行分析。以表 1 构型参数作为并联机构初始构型参数,对并联机构的位置工作空间与姿态工作空间进行分析。

#### 3.1 支腿腿长随参数改变时工作空间变化情况

(1)  $R_p/R_B$  对有效工作空间的影响。 $R_B = 140 \text{ mm}$ , 将  $R_p$  由  $40 \text{ mm}$  不断增大,如图 8 所示,当  $R_p/R_B$  比值由  $0.3 \sim 1$  时,有效工作空间体积不断增大,由初始值  $8.0223 \times 10^4 \text{ mm}^3$  增至  $13.235 \times 10^4 \text{ mm}^3$ ,  $R_p/R_B$  比值为 1 时,体积最大,此后随着  $R_p/R_B$  比值增加,体积迅速减小。

(2)  $H$  对有效工作空间的影响。如图 9 所示,  $H$  由  $120 \text{ mm} \sim 280 \text{ mm}$ , 有效工作空间随高度  $H$  增大而增大,但  $H$  增大的同时,机构雅可比矩阵的全局条件数也在增大,机构运动性能越来越差。因此不能简单依靠改变  $H$  提高工作空间,但适当增大机构高度对提升机构有效工作空间是有利的。

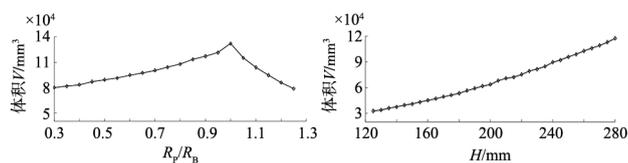


图 8  $R_p/R_B$  对有效工作空间的影响

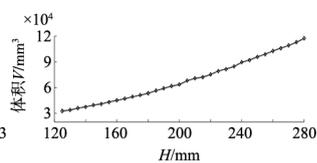


图 9 高度  $H$  对有效工作空间的影响

(3)  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对有效工作空间的影响。如图 10 所示,使  $\theta_p$  和  $\theta_B$  以相同数值同时增大或减小,  $\theta_p$  和  $\theta_B$  的角度对工作空间体积影响规律成对称分布,当  $\theta_p$  和  $\theta_B$  由  $5^\circ \sim 45^\circ$  时,体积由  $5.2219 \times 10^4 \text{ mm}^3$  增至  $16.201 \times 10^4 \text{ mm}^3$ 。当  $\theta_p$  和  $\theta_B$  在  $45^\circ \sim 75^\circ$  取值时,体积没有发生较大变化,此后  $\theta_p$  和  $\theta_B$  增大,工作空间体积减小。

需要指出的是,  $\theta_p$  和  $\theta_B$  接近  $60^\circ$  时,机构运动处于奇异姿态,因此,圆心角选值不宜过大,否则会导致机构奇异。

(4)  $R_p/R_B$  对姿态工作空间的影响。如图 11 所示,  $R_p/R_B$  比值越小,姿态工作空间越大,此规律与  $R_p/R_B$  比值对有效工作空间的影响正好相反。

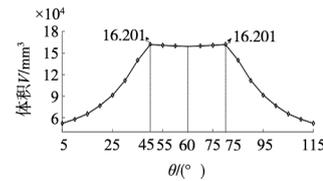


图 10  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对有效工作空间的影响

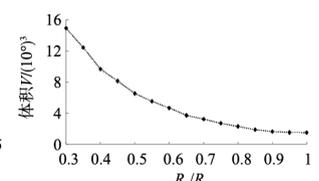


图 11  $R_p/R_B$  对姿态工作空间的影响

(5)  $H$  对姿态工作空间的影响。如图 12 所示,高度  $H$  由  $120 \text{ mm} \sim 280 \text{ mm}$  时姿态工作空间逐渐增大,可见适当增大机构高度既可以提高有效工作空间,也可以提高姿态工作空间。

(6)  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对姿态工作空间的影响。如图 13 所示,姿态工作空间随  $\theta_p$  和  $\theta_B$  值由  $0 \sim 60^\circ$  而不断增大,  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对姿态工作空间体积影响规律成对称分布,但当圆心角值接近  $60^\circ$  时,要考虑机构是否会发生奇异。

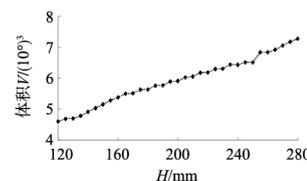


图 12 高度  $H$  对姿态工作空间的影响

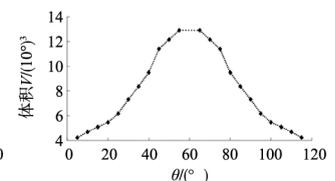
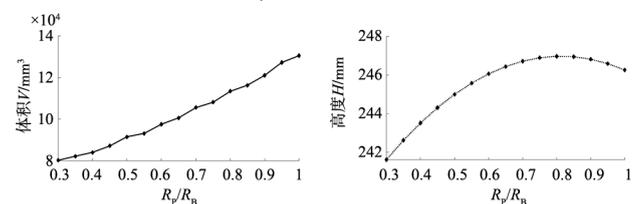


图 13  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对姿态工作空间的影响

#### 3.2 支腿腿长不随参数改变时工作空间变化情况

在实际工程设计中,在对电机、编码器等支腿内部元器件进行选型设计后,支腿腿长就已确定。因此,本节在支腿腿长一定的情况下,改变构型参数  $R_p$ 、 $R_B$ 、 $H$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_B$ ,对工作空间影响规律进一步进行分析。

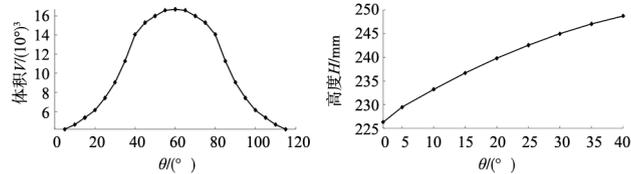
(1)  $R_p/R_B$  对有效工作空间的影响。如图 14a 所示,  $R_p/R_B$  比值由  $0.3 \sim 1$ ,  $H$  随之逐渐增大,其变化规律与 3.1 中的规律相似。同时当支腿腿长一定时,增大  $R_p/R_B$  比值,机构整体高度  $H$  也会发生微小变化才能满足支腿腿长不变,如图 14b 所示。



(a)  $R_p/R_B$  对有效工作空间的影响 (b) 高度随  $R_p/R_B$  比值变化

图 14 有效工作空间随参数变化情况

(2)  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对有效工作空间的影响。如图 15a 所示,支腿腿长确定时,  $\theta_p$  和  $\theta_B$  以相同数值改变,此时有效工作空间先增大后减小,工作空间体积变化规律成对称分布,当圆心角值接近  $60^\circ$  时要考虑机构是否会奇异。当支腿腿长一定时,增大  $\theta_p$  和  $\theta_B$  值,机构整体高度  $H$  也需发生微小变化才能满足支腿腿长不变,如图 15b 所示。



(a)  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对有效工作空间的影响 (b) 高度随  $\theta_p$  和  $\theta_B$  变化

图 15 有效工作空间随参数变化情况

(3)  $R_p/R_B$  对姿态工作空间的影响。如图 16 所示,分析发现  $R_p/R_B$  比值由 0.3 ~ 1,姿态工作空间逐渐减小。同时当支腿腿长一定时,增大  $R_p/R_B$  比值,机构整体高度  $H$  也会发生微小变化才能满足支腿腿长不变,如图 14b 所示。

(4)  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对姿态工作空间的影响。保证其他构型参数不变,如图 17 所示,姿态工作空间随角度增大而先增大后减小。同样,当圆心角值接近  $60^\circ$  时,要考虑机构是否会发生奇异。支腿腿长确定时,改变  $\theta_p$  和  $\theta_B$  值,  $H$  也随之发生变化,如图 15b 所示。

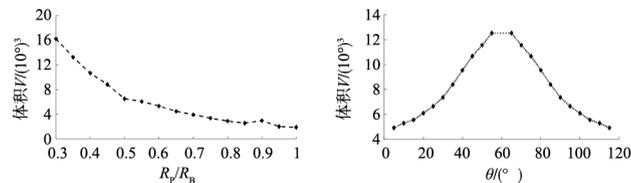


图 16  $R_p/R_B$  对姿态工作空间的影响

图 17  $\theta_p$  和  $\theta_B$  对姿态工作空间的影响

### 3.3 偏置铰链偏置量 $e$ 对有效工作空间的影响

偏置铰链并联机构与采用普通铰链的并联机构区别在于偏置铰链的工作空间更大<sup>[24]</sup>,本节中,考虑  $R_p$ 、 $R_B$ 、 $H$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_B$  和  $e$  (偏置量) 等构型参数,对比采用不同铰链时,两种类型并联机构的有效工作空间大小。

(1) 当并联机构上下平台半径、上下平台的圆心角以及高度均相同的条件下,对比采用不同铰链的并联机构的工作空间大小如表 2 所示。

表 2 数据表

$R_p$	采用偏置铰链 并联机构	采用普通铰链 并联机构
$R_p$	相同	相同
$R_B$	相同	相同
$H$	相同	相同
$\theta_p$	相同	相同
$\theta_B$	相同	相同
$e/\text{mm}$	18	0
有效工作空间体积/ $\text{mm}^3$	$9.1954 \times 10^4$	$8.9068 \times 10^4$

由表中数据得出,各构型参数均相同的并联机构,采用偏置铰链的并联机构工作空间优于采用普通铰链的并联机构。此时由于两者高度相同,因此采用偏置铰链并联机构的腿长,在去掉偏置铰链偏置量后一定

小于采用普通铰链的并联机构腿长。

而实际设计中,支腿腿长是确定的,由于偏置铰链偏置量的存在,采用偏置铰链的并联机构支腿一定比采用普通铰链的并联机构的支腿更长。因此,在保证  $R_p$ 、 $R_B$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_B$  等构型参数均相同以及支腿腿长(不包含铰链偏置量)相同的条件下,再次比较了两种并联机构的工作空间大小如表 3 所示。由此可以得出,在当前条件下,采用偏置铰链的工作空间体积会更大。

表 3 数据表

$R_p$	采用偏置铰链 并联机构	采用普通铰链 并联机构
$R_p$	相同	相同
$R_B$	相同	相同
$H$	不同	不同
$\theta_p$	相同	相同
$\theta_B$	相同	相同
$e/\text{mm}$	18	0
有效工作空间体积/ $\text{mm}^3$	$9.1954 \times 10^4$	$7.7644 \times 10^4$

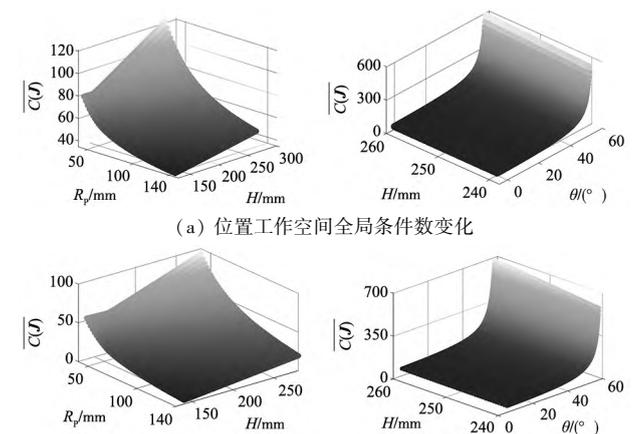
综合表 2 和表 3 可以得出,在支腿伸长量与铰链转角能力相同条件下,采用偏置铰链的并联机构的位置工作空间要比采用普通铰链的工作空间大。

### 3.4 全局条件数分析

上述分析过程中,不同构型参数组合下的并联机构的工作空间是不同的,为确保上述分析过程中计算得到的工作空间中各位置点不存在奇异,以式(6)推导出机构雅可比矩阵  $J$  的条件数  $C(J)$ ,并以工作空间内所有位姿点  $C(J)$  的均值作为衡量机构运动性能的指标。均值  $\overline{C(J)}$  越小,机构的运动传递性能越好,越不会产生奇异。

$$\overline{C(J)} = \frac{\iiint_{\Omega} C(J) d_v}{\iiint_{\Omega} d_v} \quad (9)$$

对不同构型参数下的机构全局条件数进行分析并整理如图 18 所示。对位置工作空间进行参数灵敏性分析,仅当圆心角值接近  $60^\circ$  时全局条件数趋于无穷大,而在其他参数变化域内,机构雅可比矩阵最大全局条件数未超过 120。在对姿态工作空间进行参数灵敏性分析时,当圆心角值接近  $60^\circ$  时,全局条件数也趋于无穷大,而在其他参数变化域内,机构雅可比矩阵最大全局条件数未超过 100。



(a) 位置工作空间全局条件数变化 (b) 姿态工作空间全局条件数变化

图 18 全局条件数分析

因此上述进行参数灵敏性分析中,不同构型参数组成的并联机构的全局条件数都是稳定变化的,没有出现奇异值,因此对各结构参数进行参数灵敏性分析时得到的数据规律是可靠的。

### 3.5 参数灵敏性分析总结

综合上述分析得出:

(1)对于有效工作空间,增大上平台与下平台的半径比值,可以增大机构的有效工作空间。适当增加机构高度,也可以提高机构的工作空间。同时机构圆心角适当增大,也可以改善工作空间,但在接近 60° 时,要考虑是否会产生运动奇异问题。

(2)对于姿态工作空间,增大上平台与下平台的半径比值会减小机构姿态工作空间。适当增加机构高度可以提高机构姿态工作空间。适当增大机构的圆心角,也可以改善工作空间。

(3)偏置铰链不仅能够为机构提高良好的刚度性能<sup>[25]</sup>,也可以改善机构的工作空间。

## 4 工作空间优化

### 4.1 工程应用实例

根据某车载望远镜的光学装调任务,因此需要设计一台满足表 4 中各参数指标的次镜并联调整机构,同时由于望远镜整体安置于车厢中,受车内空间限制,因此对机构整体尺寸也提出了要求:下平台直径不大于 300 mm,上平台半径不大于 200 mm,高度不大于 260 mm。关于并联调整机构的具体运动性能指标要求如表 4 所示。

表 4 次镜并联调整结构主要指标

参数	指标
行程 X, Y, Z / mm	±25, ±25, ±15
行程 $\theta_x, \theta_y, \theta_z / (^\circ)$	±10
X, Y, Z 平移运动分辨率 / $\mu\text{m}$	0.5
绕 X, Y, Z 轴转动运动分辨率 / (")	0.5
重复精度 X, Y, Z / $\mu\text{m}$	±0.5
重复精度 $\theta_x, \theta_y, \theta_z / (")$	±0.5

由表 4 可以得出,要达到指标要求的行程,则需要对工作空间进行优化分析。通过上述参数灵敏性分析可知,当增大平台高度或者增大圆心角均可以提高定位的姿态工作空间与定姿态的位置工作空间,而当增大上平台半径时,姿态工作空间会较小,位置工作空间会增大,两者关于结构参数存在竞争关系,因此无法选择两种指标均取得最优时的结果,需要做出取舍。

基于上述参数灵敏性分析得到的规律,为了在参数范围内得到符合要求的构型参数,本文提出了一种基于 NSGA-II 的多目标优化方法。首先给出其优化模型。

(1)设立约束条件。表 5 给出了并联机构各结构参数设计变量的变化范围。

表 5 机构主要设计变量

设计变量	边界条件
$R_p / \text{mm}$	[50, 100]
$R_b / \text{mm}$	[100, 150]
$H / \text{mm}$	[220, 260]
$\theta / (^\circ)$	[10, 40]

(2)确定目标函数。机构目标函数  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  分别为:

$$\begin{cases} f_1(x) = L_z \\ f_2(x) = L_T \end{cases}$$

将机构的定姿态位置工作空间用  $V_z$  表示,定位置姿态工作空间用  $V_T$  表示,当  $V_z$  体积增大时,并联机构在 X 或 Y 向的平移运动距离随之增大;当  $V_T$  体积增大时,并联机构在绕 X 轴或 Y 轴的旋转运动角度会增大。因此以  $L_z$  表示  $V_z$  在 X \ Y 向的平移运动可达距离,  $L_T$  表示  $V_T$  在绕 X \ Y 转动时的旋转运动可达角度。为了减少不必要的加工成本等,支腿伸长量应在尽可能小的条件下满足表 4 行程指标要求,因此设置支腿伸长量为 30 mm,此时并联机构在 Z 向的平移或转动行程可以满足指标需求,而在 X/Y 向的平移或转动行程则需要利用算法进行优化,由于  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  的数值越大,表征机构运动行程越好,而 NSGA-II 是以目标函数取极小值为目标,因此对  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  分别取相反数后,再进行优化。

(3)优化结果。NSGA-II 算法的计算复杂度低,运行速度快,解集收敛性好,因此该算法广泛应用于解决多目标优化问题。在 MATLAB 软件中对目标函数进行求解优化,设置初始种群大小为 100,进化代数最大值为 200,交叉适应度函数偏差为  $1\text{E}-06$ ,迭代停止次数为 200,运行结束后得到 Pareto 解集及目标函数值。

如图 19 所示,最优结集中的虚线框内即为满足机构行程需求时所对应的结构参数,考虑机构运动行程需求,同时由于结构件与外购电机等元器件的尺寸等限制因素,为了更好的便于后续设计,在最优结集中选择了参数  $R_p = 80.3828 \text{ mm}$ ,  $R_b = 129.7954 \text{ mm}$ ,  $H = 246.2392 \text{ mm}$ ,  $\theta = 14.9846^\circ$ ,此时参数对应  $L_T$  为  $10.5^\circ$ ,  $L_z$  为 32 mm,为便于后续设计与加工,取整数为  $R_p = 80 \text{ mm}$ ,  $R_b = 130 \text{ mm}$ ,  $H = 246 \text{ mm}$ ,  $\theta = 15^\circ$  进行设计。取整后的各参数值相比原参数值仅发生了微小的变化,对机构的工作空间影响很小。

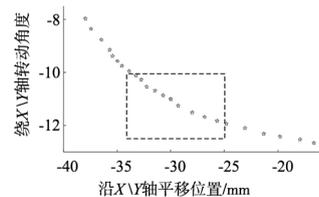


图 19 Pareto 前沿

### 4.2 实验测试

基于上述分析得到的结构参数,本文研制了车载光学系统 Stewart 次镜调整机构如图 20a 所示。机构的行程是并联调整机构进行位姿调整的关键。为了进一步验证机构行程,因此对并联机构的行程进行了实验测试。首先搭建了测试系统如图 20b 所示,其中利用高精度光栅尺测量机构平移位移,利用自准直仪和电子经纬仪测量机构的转角位移,测试系统搭建在隔振平台上,可以隔离外界带来的低频、高频振动。

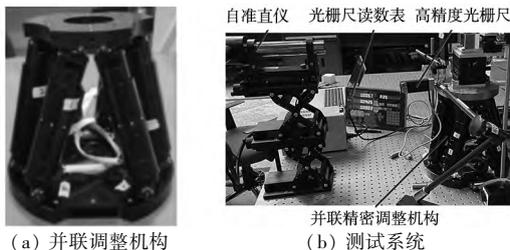


图 20 并联调整机构实验测试

表 4 给出的指标中要求机构能在 X \ Y 轴平移行程达到  $\pm 25 \text{ mm}$ , Z 轴平移行程达到  $\pm 15 \text{ mm}$ ,绕 X \ Y \ Z 轴转动行程达到  $\pm 10^\circ$ ,因此,采用 6 个自由度分开测试的方法,使上平台沿 X \ Y \ Z 轴分别移动指标要求的最大行程,同理,绕 X \ Y \ Z 轴分别转动要求的最大

行程,测量6根支腿的伸缩量变化如图21所示,其中,进行平移测试时,以每一步为5 mm步进,进行角度测试时,以每一步为5°步进,得到指令值与实际值对比图,其中最大位移行程偏差未超过0.5 μm,最大角度行程偏差未超过0.5"。并联机构在各个自由度上的运动均达到了目标位置,因此该并联机构的运动行程符合指标需求,同时验证了优化算法的有效性。

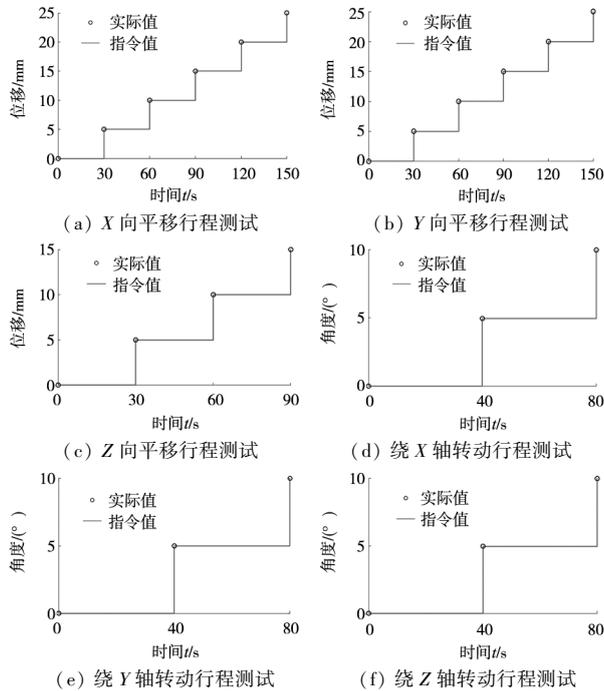


图21 行程测试

## 5 结论

本文为了解决偏置铰链并联机构工作空间难以直观评估和设计的问题,基于构型参数对其工作空间进行灵敏性分析并提出了一种工作空间寻优方法。根据研究结果可以得到以下结论:

(1)建立了逆向运动学,推导了雅可比矩阵。利用极坐标搜索法得到机构位置工作空间与姿态工作空间,根据实际应用去除了位置工作空间中的不规则工作空间,确定了并联机构有效工作空间;

(2)以并联机构工作空间体积作为评价指标,分析 $R_p$ 、 $R_B$ 、 $H$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_B$ 和 $e$ 对工作空间体积的影响,绘制了构型参数对工作空间体积的影响曲线,利用曲线规律,在不改变支腿伸长量与铰链转角能力前提下,仍可以进一步增大并联机构工作空间;

(3)结合工程实例提出了一种基于构型参数的工作空间优化方法。在有限参数范围内,基于NSGA-II算法对构型参数进行优化设计,该优化设计方法能够快速得到符合要求的构型参数组合,便于工程应用。

同时,本文的参数灵敏性分析和优化设计方法也为并联机构的后续研究和应用提供了一定的参考价值。

### 【参考文献】

[1] 倪涛,徐海远,李东,等.六自由度平台动力学前馈柔顺控制研究[J].中国机械工程,2022,33(6):683-689.  
 [2] 谢王春,韩秋实.六自由度串联机械臂运动学及其工作空间研究[J].组合机床与自动化加工技术,2020(6):32-36.  
 [3] 韩哈斯敖其尔.空间望远镜用高精度高刚度并联调整平台设计与测试研究[D].长春:中国科学院大学,2019.  
 [4] 赵强,阎绍泽.双端虎克铰型六自由度并联机构的动力学

模型[J].清华大学学报(自然科学版),2005,45(5):610-613.

- [5] GLOESS R, LULA B. Challenges of extreme load hexapod design and modularization for large ground-based telescopes [J]. Proceedings of SPIE the International Society for Optical Engineering, 2010, 7739(2): 327-330.  
 [6] MOHSEN M D, BIJAN S N. Inverse kinematics analysis of 6-RRR parallel manipulators [C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2013: 644-648.  
 [7] YU Y, XU Z, WU Q, et al. Kinematic analysis and testing of a 6-RRRPRR parallel manipulator [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(13): 2515-2527.  
 [8] HAN H S, HAN C Y, XU Z B, et al. Kinematics analysis and testing of novel 6-P-RR-R-RR parallel platform with offset RR-joints [J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 1989, 2018: 095440621881700.  
 [9] 孙佳霖.用于大型望远镜次镜调整机构的高精度 Hexapod 平台设计与研究[D].济南:山东理工大学,2022.  
 [10] 王启明,张汉祖,蒋江月,等.平面平台型6-PSS并联机构构型选择与参数优化[J].农业机械学报,2022,53(5):449-458.  
 [11] 刘秀莹,张建军,刘承磊,等.基于工作空间的踝关节康复广义球面并联机器人运动学参数优化[J].中国机械工程,2021,32(16):1921-1929.  
 [12] 于金山,李潇,陶建国,等.面向在轨装配的八索并联机构构型设计与工作空间分析[J].机械工程学报,2021,57(21):1-10.  
 [13] 武晓轩,崔冰艳,杨中原,等.2UU-UPU并联机构的工作空间与结构参数分析[J].机械设计与制造,2022(12):79-83.  
 [14] 杨超,叶伟,陈巧红.并联机构敏感性分析和多目标优化设计方法[J].机械工程学报,2022,58(19):229-241.  
 [15] 于阳.大型空间望远镜次镜精密调整机构研究[D].长春:中国科学院研究生院,2016.  
 [16] 张炆.小型化纳米级高精度并联机器人设计与研究[D].长春:中国科学院大学,2023.  
 [17] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等.Stewart衍生型并联机器人的工作空间分析[J].机械设计与研究,2020,36(4):47-51,61.  
 [18] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等.并联机器人工作空间的区间离散法[J].光学精密工程,2021,29(8):1847-1856.  
 [19] 韩春杨,徐振邦,吴清文,等.空间光学遥感器次镜调整机构多目标优化设计[J].载人航天,2016,22(1):81-87.  
 [20] 刘建慧,涂远洋,姚威,等.新型微创腹腔镜手术机器人工作空间分析[J].机械设计与研究,2019,35(2):26-29,35.  
 [21] YAO W, CHILDS P R. Application of design rationale for a robotic system for single-incision laparoscopic surgery and natural orifice transluminal endoscopic surgery [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part H Journal of Engineering in Medicine, 2013, 227(7): 821-830.  
 [22] 方旭光,张为,郑敏利,等.六自由度Stewart平台参数化建模及优化[J].哈尔滨理工大学学报,2021,26(1):66-76.  
 [23] 周晓光,刘剑超,俞艺涵,等.舰载基础能力训练动感模拟器设计与实现[J].计算机仿真,2023,40(9):29-32,496.  
 [24] 朱嘉琦,韩哈斯敖其尔,张炆,等.采用偏置铰链的并联调整机构工作空间分析[J].现代制造工程,2019(10):45-51.  
 [25] 于阳,徐振邦,于鹏,等.空间光学遥感器次镜定位平台的设计与测试[J].载人航天,2016,22(1):74-80.

(编辑 赵蓉)