

永磁同步电机快速超螺旋滑模控制

宋昱霖^{1,2}, 李洪文¹, 邓永婷¹

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学 光电学院, 北京 101400)

摘要: 为了增加永磁同步电机(PMSM)伺服控制系统的抗干扰能力, 提高控制系统动态响应性能, 提出了一种基于全局快速滑模控制和超螺旋算法(STA)的全局快速超螺旋滑模速度控制器并应用于永磁同步电机转速控制。根据经典超螺旋算法提出了改进的新型超螺旋算法, 解决了经典超螺旋算法存在的收敛速度慢、参数选取依赖干扰边界信息等缺点, 并在提出的新型螺旋算法的基础上证明其稳定性和有限时间收敛的特性。最后, 针对不同的扰动与摄动分别验证了该算法的鲁棒性并求出最佳系数。仿真结果表明, 与PI控制、终端滑模控制、经典超螺旋终端滑模控制相比, 该方法能在电机空载启动时及外加时变干扰等情况下使稳态误差减小和鲁棒性显著提升。

关键词: 超螺旋算法; 滑模控制; 终端滑模控制; 永磁同步电机; 转速控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Fast Super Twisting Sliding Mode Control of Permanent Magnet Synchronous Motor

SONG Yu-lin^{1,2}, LI Hong-wen¹, DENG Yong-ting¹

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130033, China;

2. School of Optoelectronics, University of Chinese Academy of Science, Beijing 101400, China)

Abstract: In order to improve the anti-interference ability and dynamic response performance of the permanent magnet synchronous motor (PMSM) servo control system, a global fast super twisting sliding mode speed controller is proposed and applied to the speed control. Based on the classical STA, the improved STA overcomes the defects of classical STA, such as slow convergence rate and parameter selection depending on the disturbance boundary information. Then, based on the proposed new STA, its stability and finite time convergence are proved. Finally, the robustness of the algorithm is verified for different disturbances and perturbations, and the optimal coefficients are obtained. Compared with PI control, terminal sliding mode control and classical super-twisting terminal control, the simulation results by the mentioned method can reduce the steady-state error and improve the robustness significantly on the condition of no-load starting and time-varying disturbance.

Key words: Super twisting algorithm; sliding mode control; terminal sliding mode control; permanent magnet synchronous motor; rotary speed control

1 引言

永磁同步电机(permanent magnet synchronous motor, PMSM)因其功率因数高、功率密度高、可靠性高、转矩脉动低、振动噪声小、弱磁范围广等优点逐渐在机器人、高精度数控机床、光电转台、航

空航天、新能源汽车等不同的领域得到广泛应用^[1]。目前, PMSM 的控制仍以 PI 控制为主。PI 控制算法具有结构简单、易于数字化实现等优点, 但由于 PMSM 是一个多变量、非线性、强耦合的复杂控制

收稿日期: 2020-10-21; 修回日期: 2020-11-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(U2031126)

作者简介: 宋昱霖(1996-), 男, 四川资阳人, 研究生, 主要研究方向为精密伺服控制等(本文通信作者, Email: 903712821@qq.com); 李洪文(1970-), 男, 四川乐至人, 博士, 研究员, 主要从事精密伺服控制、电子设计等方面的科研工作。

对象，当系统受到参数摄动或外部负载扰动时，PI 控制器的控制性能将变差^[2]。因此，如何设计一种新型的控制策略以满足伺服控制系统使用者日益增加的性能要求成为了必须解决的问题。

近年，现代控制理论如鲁棒控制、自适应控制、智能控制和滑模变结构控制等都被应用到永磁同步电机的控制设计当中^[3-6]。其中，滑模变结构控制具有不需要系统高精度的数学模型，对参数摄动和外部扰动不敏感，控制器实现简单等优点，已广泛应用在永磁同步电机的速度控制当中^[7-11]。传统一阶滑模变结构控制由于切换项的存在，导致控制律不连续，不可避免会发生抖振现象，且趋近律切换增益取决于扰动大小。使用连续近似方法（如引入边界层）能抑制抖振，却减小了鲁棒性^[12]。普通滑模控制渐近收敛速度可通过调整滑模面参数实现，但状态跟踪误差不论如何也不会在有限时间内收敛到零。如何抑制抖振、提高系统鲁棒性是滑模控制方法应用的关键。

全局快速终端滑模控制保证了系统在有限时间内到达滑模面，对系统不确定性和干扰具有很好的鲁棒性，通过选取足够小的阶数可使系统状态到达滑模面足够小的邻域内，沿滑模面收敛到平衡状态^[13]。针对抖振现象，文献[14~16]提出了二阶滑模超螺旋算法(super-twisting algorithm, STA)，将开关函数隐藏在积分项内，具有算法简单、避免抖振、鲁棒性强等优点，实现系统状态有限时间收敛。但传统超螺旋算法存在参数选取依赖干扰边界信息，距平衡点较远时收敛速度慢等问题。

针对上述问题，本文设计了一种全局快速超螺旋滑模控制算法，改进了传统超螺旋算法以削弱抖振和抵消干扰，提出了新的永磁同步电机滑模控制律，解决了经典超螺旋算法存在的收敛速度慢，参数选取依赖干扰边界信息，状态向量的指数始终为 1/2，不能使滑模面系统状态收敛到更小的邻域内等缺点。同时，对其在有限时间收敛、鲁棒性及最佳参数选取方面进行了证明。最后通过仿真及实验验证了该算法在永磁同步电机控制中的有效性。

2 永磁同步电机数学模型

为了简化分析，作如下假设^[17]：① 转子永磁磁场在气隙空间呈正弦分布，定子电枢绕组中的感应电动势也为正弦分布；② 忽略定子铁心饱和，认为磁路线性，电感参数不变；③ 不计铁心涡流和磁滞损耗；④ 转子上无阻尼绕组。采用 $i_d=0$ 的矢量控制方式，PMSM 控制系统框图如图 1 所示，PMSM 在 d,q 轴坐标系下的数学模型为

$$\begin{cases} u_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - L_q \omega i_q \\ u_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + L_d \omega i_d + \omega \psi_f \end{cases} \quad (1)$$

$$T_e = \frac{3}{2} p \psi_f i_q \quad (2)$$

$$K_t = \frac{3}{2} p \psi_f \quad (3)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_e - B\omega - T_L \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (5)$$

式中， u_d, u_q 分别为 d, q 轴电压； i_d, i_q 分别为 d, q 轴电流；对于隐极性 PMSM，其电感满足 $L_d = L_q$ ； L_d, L_q 分别为 d, q 轴的等效电感； R_s 为定子电阻， p 为极对数； ω 为转子机械角速度； J 为转动惯量； T_e 为电磁转矩； T_L 为负载转矩； B 为粘滞摩擦系数； K_t 为转矩系数； ψ_f 为永磁体磁链； θ 为转子机械角位置。

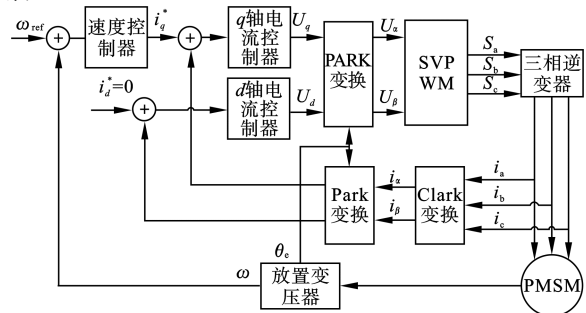


图 1 PMSM 控制系统框图

Fig. 1 Block diagram of PMSM control system

3 二阶滑模控制器设计

3.1 控制律设计

综合考虑线性滑动模态和快速终端滑动模态，使系统状态在有限时间收敛。由于非奇异快速终端滑模控制的控制系数中含有误差项，在误差较小时不可避免出现收敛停滞现象^[18]，导致收敛速度过慢，因此仍采用普通全局快速终端滑动模态。取全局快速终端滑模面为

$$s = x_2 + cx_1 + \beta x_1^p \quad (6)$$

式中， x_i 为状态变量， $c, \beta > 0$ ， $p > q$ ，且 p, q 为正奇数。该滑模面的收敛性及系统状态到滑模面的到达时间已在文献[12]中证明。令

$$x_1 = e = \theta^* - \theta \quad (7)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \omega^* - \omega \quad (8)$$

式中， ω^* 为参考机械角速度； θ^* 为参考机械角度，

可通过对参考机械角速度积分获得。

对滑模面求微分可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_2 + cx_2 + \frac{\beta q}{p} x_1^{p-1} x_2 = \\ \dot{\omega}^* &- \frac{1}{J}(K_t i_q - B\omega - T_l + cx_2 + \frac{\beta q}{p} x_1^{p-1} x_2) \end{aligned} \quad (9)$$

一阶滑模控制在实际工程应用中依赖于采样周期,其误差为采样周期的高阶无穷小,而高阶滑模控制使系统在高阶滑模面和滑模面组成的滑模流形 $s(t, x) = \dot{s}(t, x) = 0$ 上滑动,对不确定非线性系统建模误差与外部干扰有强鲁棒性。为抑制抖振和抵消参数摄动和外部扰动干扰,采用二阶滑模控制算法。二阶滑模控制算法可使二阶滑模面 \dot{s} 也能快速趋近于零,控制目标使系统状态在有限时间内收敛到 $s(t, x) = \dot{s}(t, x) = 0$ 上,并沿滑模流形收敛到零。相比于螺旋(twisting)算法、次优(sub-optimal)算法、给定收敛律(prescribed convergence law)算法、准连续(quasi-continuous)算法、漂移(drift)算法等二阶算法,STA 具有不需要计算滑模变量的导数和极值的优点^[19],传统 STA 为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = -l_2 \text{sgn}(x_1) \end{cases} \quad (10)$$

式中, $l_i > 0, i = 1, 2$ 。在时变扰动下,传统 STA 有限时间收敛需要系数满足以下取值^[20]:

$$l_2 > L, l_1 > 2\sqrt{l_2 - \sqrt{l_2^2 - L^2}} \quad (11)$$

式中, L 为扰动的导数的界。

有限的取值降低了系统的可调性,有时不得不在动态性能与鲁棒性之间做取舍。且传统超螺旋算法中不含线性项,导致滑模面在离平衡点较远时的收敛速度过慢,状态向量的指数始终为 1/2 不能使滑模面系统状态收敛到更小的邻域内。而直接将算法中的非线性项指数变为可调项却难以证明该算法的收敛性。针对以上存在的问题对经典 STA 进行改进,加入线性项,并使两项非线性项的积为线性项,使其指数变得可调,增加了系统的可调性和可证性。改进后的超螺旋算法变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \varphi_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = -l_2 \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_1) = k_1 x_1 + k_2 |x_1|^\alpha \text{sgn}(x_1) + k_3 |x_1|^{1-\alpha} \text{sgn}(x_1) \\ \varphi_2(x_1) = \varphi_1'(x_1) \varphi_1(x_1) = k_1^2 x_1 + k_2^2 \alpha |x_1|^{2\alpha-1} \text{sgn}(x_1) + \\ k_3^2 (1-\alpha) |x_1|^{1-2\alpha} \text{sgn}(x_1) + (\alpha+1) k_1 k_2 |x_1|^\alpha \text{sgn}(x_1) + \\ k_2 k_3 \text{sgn}(x_1) + (2-\alpha) |x_1|^{1-\alpha} \text{sgn}(x_1) \end{cases} \quad (12)$$

式中, $0 < \alpha < 1, k_i > 0, l_i > 0$, 将式(12)代入式(9)中, STA 中的状态变量为滑模面

$$x_1 = s, x_2 = \dot{s} \quad (13)$$

可得控制律如下:

$$\begin{aligned} i_q^* &= \frac{1}{K_t} (J\dot{\omega}^* + B\omega + T_l + J\alpha\dot{e} + \\ &\frac{J\beta q}{p} e^{p-1} \dot{e} + J(l_1 \varphi_1(s) + l_2 \varphi_2(s))) \end{aligned} \quad (14)$$

3.2 有限时间收敛性分析

文献[21~23]分别对传统 STA、带线性项的 STA 以及光滑 STA 进行了有限时间收敛性证明。现证明改进 STA 的有限时间收敛性。令

$$A = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

由于 $l_i > 0, i = 1, 2$, 特征根均具有负实部,易证矩阵 A 是 Hurwitz 的。对于任意正定对称矩阵 Q , 一定存在一个正定对称矩阵 P 满足李雅普诺夫方程:

$$A^T P + PA = -Q \quad (16)$$

定义二次型李雅普诺夫函数为

$$V(x) = \zeta^T P \zeta \quad (17)$$

式中, $\zeta^T = [\varphi_1(x_1), x_2]$ 。易证 $V(x)$ 是连续正定函数且径向无界,除 $x = 0$ 外处处可微。

由于向量 $\zeta^T = [\varphi_1(x_1), x_2]$ 导数为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \varphi_1'(x_1) \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \varphi_1'(x_1) \begin{bmatrix} -l_1 \varphi_1(x_1) + x_2 \\ -l_2 \varphi_1(x_1) \end{bmatrix} = \\ \varphi_1'(x_1) \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix} &= \varphi_1'(x_1) A \zeta \end{aligned} \quad (18)$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} = \varphi_1'(x_1) \zeta^T (A^T P + PA) \zeta = \\ &- \varphi_1'(x_1) \zeta^T Q \zeta \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$\varphi_1'(x_1) = k_1 + k_2 \alpha |x_1|^{\alpha-1} + k_2 (1-\alpha) |x_1|^{-\alpha} > 0 \quad (20)$$

故 $\dot{V}(x)$ 是负定的,系统大范围渐近稳定。由于 $V = \zeta^T P \zeta$ 为二次型正定函数,所以有

$$\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \quad (21)$$

式中, $\lambda_{\min}\{P\}$ 和 $\lambda_{\max}\{P\}$ 分别为矩阵 P 的最小和最

大特征根； $\|\zeta\|_2^2$ 为欧式空间 \mathbf{R}^2 上的 2-范数。

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_2^2 &= \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \varphi_1^2(x) + x_2^2 = k_1^2 x_1^2 + k_2^2 |x_1|^{2\alpha} + \\ &k_3^2 |x_1|^{2-2\alpha} + 2k_1 k_2 |x_1|^{\alpha+1} + 2k_1 k_3 |x_1|^{2-\alpha} + 2k_2 k_3 |x_1| + x_2^2 \end{aligned} \quad (22)$$

于是有

$$\begin{cases} k_2 |x_1|^\alpha \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{\mathbf{P}\}} \\ k_3 |x_1|^{1-\alpha} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{\mathbf{P}\}} \end{cases} \quad (23)$$

对 $\dot{V}(x)$ 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\varphi_1'(x_1)\zeta^T \mathbf{Q} \zeta \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}\varphi_1'(x_1)\|\zeta\|_2^2 - \\ &k_2 \alpha \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}|x_1|^{\alpha-1}\|\zeta\|_2^2 - k_3(1-\alpha)\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}|x_1|^{-\alpha}\|\zeta\|_2^2 \leq \\ &-\frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}V - \frac{k_2 \alpha \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}V \frac{1}{|x_1|^{1-\alpha}} - \\ &\frac{k_3(1-\alpha)\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}V \frac{1}{|x_1|^\alpha} = \\ &-\frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}V - \frac{k_2 k_3 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{\mathbf{P}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}V^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

令

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, k_1) = \frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}} \\ \gamma_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, k_2, k_3) = \frac{k_2 k_3 \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{\mathbf{P}\}}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}} \end{cases} \quad (25)$$

$$\dot{V} = -\gamma_1 V - \gamma_2 V^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

令

$$y = V^{\frac{1}{2}}, \dot{y} = \frac{1}{2}V^{-\frac{1}{2}}\dot{V} \quad (27)$$

$$\dot{y} + \frac{\gamma_1}{2}y = -\frac{\gamma_2}{2} \quad (28)$$

解该微分方程得

$$y = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} + y(0)e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} \quad (29)$$

收敛时间为

$$t_s = \frac{2}{\gamma_1} \ln(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} V^{\frac{1}{2}}(0)) \quad (30)$$

当 $\gamma_1 = 0$ 或 $\gamma_2 = 0$ 时，李雅普诺夫函数为简单的指数收敛。证毕。

3.3 鲁棒性分析

假设系统受到非线性及时变的外部扰动和电机内部参数摄动影响，STA 方程可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \varphi_1(x_1) + x_2 + \eta_1(t, x) \\ \dot{x}_2 = -l_2 \varphi_2(x_1) + \eta_2(t, x) \end{cases} \quad (31)$$

3.3.1 扰动为大小为零的时变扰动时

假设扰动满足：

$$\eta_1(t, x) = 0, \eta_2(t, x) \leq L, \forall x \neq 0, t \in [0, \infty) \quad (32)$$

向量 $\zeta^T = [\varphi_1(x_1), x_2]$ 求导为

$$\dot{\zeta} = \dot{\varphi}_1(x_1) \begin{bmatrix} -\varphi_1(x_1) + k_4 x_2 \\ -\varphi_1(x_1) + \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_1'(x_1)} \end{bmatrix} = \dot{\varphi}_1(x_1)(\mathbf{A}\zeta + \boldsymbol{\eta}) \quad (33)$$

其中，

$$\boldsymbol{\eta}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_1'(x_1)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

对 $\dot{V}(x)$ 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\zeta}^T \mathbf{P} \zeta + \zeta^T \mathbf{P} \dot{\zeta} = \varphi_1'(x_1)[\dot{\zeta}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})\zeta + \\ &\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \zeta + \zeta^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}] = \varphi_1'(x_1)\zeta^T [(\mathbf{A} + \mathbf{M})^T \mathbf{P} + \\ &\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{M})]\zeta = -\varphi_1'(x_1)\zeta^T \mathbf{Q}_R \zeta \end{aligned} \quad (35)$$

其中，

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_2(x_1)} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_2(x_1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_1'(x_1)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (36)$$

要使式(35)成立，系统大范围渐近稳定，则需使 $\mathbf{A} + \mathbf{M}$ 为 Hurwitz 的，且 \mathbf{P}, \mathbf{Q}_R 为对称正定矩阵。

由于 $|\eta_2| < L, \varphi_2 > k_2 k_3, -L/k_2 k_3 < \eta_2/\varphi_2 < L/k_2 k_3$ ，利用赫尔维茨矩阵定义可得

$$l_2 > \frac{L}{k_2 k_3} > \left| \frac{\eta_2}{\varphi_2} \right| \quad (37)$$

$$\text{令 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}, \text{ 有}$$

$$p_{11} > 0, p_{11} p_{22} > p_{12}^2 \quad (38)$$

$$q_{11} = -2l_1 p_{11} - 2(l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2}) p_{12} > 0 \quad (39)$$

$$q_{12} = p_{11} - l_1 p_{12} - (l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2}) p_{22} \quad (40)$$

$$q_{22} = 2 p_{12} \quad (41)$$

由式(39)到式(41)可得

$$\begin{aligned} q_{11} q_{22} - q_{12}^2 &= -4 l_1 p_{11} p_{12} - 4 (l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2}) p_{12}^2 + \\ &2 (p_{11} - l_1 p_{12}) (l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2}) p_{22} - (p_{11} - l_1 p_{12})^2 - \\ &(l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2})^2 p_{22}^2 > 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{又 } l_2 - \frac{L}{k_2 k_3} < l_2 - \frac{\eta_2}{\varphi_2} < l_2 + \frac{L}{k_2 k_3}, l_2 > \frac{L}{k_2 k_3}$$

令

$$\chi = -l_1 p_{12}, \Gamma = \frac{p_{22}}{p_{12}^2}, \rho = p_{22} (l_2 + \frac{L}{k_2 k_3}), \varsigma = \frac{l_2 - \frac{L}{k_2 k_3}}{l_2 + \frac{L}{k_2 k_3}}$$

原不等式改写为

$$\chi^2 - 2 \varsigma \chi \rho + \rho^2 - 2 p_{11} \chi + \frac{4}{\Gamma} \rho - 2 p_{11} \varsigma \rho + p_{11}^2 < 0 \quad (43)$$

式中, $0 < \varsigma < 1, \Gamma > 1, p_{11} \varsigma \Gamma > 1$, 只需配置 STA 系数使得 χ, ρ 落在此椭圆内部即可保证 \mathbf{P}, \mathbf{Q}_R 为对称正定矩阵, 最佳 χ, ρ 点为该椭圆圆心, 令圆心为 (χ_0, ρ_0) , 有

$$A(\chi - \chi_0)^2 + 2B(\chi - \chi_0)(\rho - \rho_0) + C(\rho - \rho_0)^2 + f < 0 \quad (44)$$

计算出各个系数并与式(43)进行对比可得

$$\rho_0 = \frac{2 p_{11} \varsigma - \frac{2}{\Gamma}}{(1 - \varsigma^2)}, \chi_0 = p_{11} + \frac{2 \varsigma (p_{11} \varsigma - \frac{1}{\Gamma})}{(1 - \varsigma^2)} \quad (45)$$

依次算出各个最佳取值为

$$l_2 = \frac{L(1 + \varsigma)}{k_2 k_3 (1 - \varsigma)}, l_1 = \chi_0 \sqrt{\frac{2 \Gamma L}{k_2 k_3 (1 - \varsigma) \rho_0}} \quad (46)$$

$$p_{12} = -\sqrt{\frac{k_2 k_3 (1 - \varsigma) \rho_0}{2 \Gamma L}}, p_{22} = \frac{k_2 k_3 (1 - \varsigma) \rho_0}{2 L} \quad (47)$$

$$\begin{cases} q_{11} = -2 \chi_0 \sqrt{\frac{2 \Gamma L}{k_2 k_3 (1 - \varsigma) \rho_0}} p_{11} + \sqrt{\frac{2 L \varsigma^2 \rho_0}{k_2 k_3 (1 - \varsigma) \Gamma}} \\ q_{12} = p_{11} + \chi_0 - \rho_0 \varsigma \\ q_{22} = -\sqrt{\frac{2 k_2 k_3 (1 - \varsigma) \rho_0}{\Gamma L}} \end{cases} \quad (48)$$

选择适当的 $k_2 k_3$ 不仅可以减小到达时间, 还可以减小稳态误差提高抗扰动性能。

3.3.2 扰动不为零的时变扰动时

假设扰动满足

$$\begin{cases} |\eta_1(t, x)| \leq b_1 + b_2 \|\zeta\|_2, \forall x \neq 0, t \in [0, \infty) \\ |\eta_2(t, x)| \leq L \end{cases} \quad (49)$$

式中, $b_i > 0$, 对向量 $\zeta^T = [\varphi_1(x_1), x_2]$ 求导得

$$\dot{\zeta} = \dot{\varphi}_1(x_1) \begin{bmatrix} -l_1 \varphi_1(x_1) + x_2 + \eta_1(t, x) \\ -l_2 \varphi_1(x_1) + \frac{\eta_2(t, x)}{\varphi_1'(x_1)} \end{bmatrix} = \dot{\varphi}_1(x_1) (\mathbf{A} \zeta + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \quad (50)$$

其中,

$$\mathbf{B}_1(t, \zeta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2(t, x) \\ \varphi_1'(x_1) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \eta_1(t, x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

对 $\dot{V}(x)$ 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \varphi_1'(x_1) (-\zeta^T \mathbf{Q}_R \zeta + \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \zeta + \zeta^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2) = \\ &-\varphi_1'(x_1) \left(\zeta^T \mathbf{Q}_R \zeta - 2 \eta_1 \zeta^T \begin{bmatrix} 1 \\ p_{12} \end{bmatrix} \right) \leq \\ &-\varphi_1'(x_1) \left(\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} \|\zeta\|_2^2 - 2(b_1 + b_2 \|\zeta\|_2) \|\zeta\|_2 r \right) = \\ &-\varphi_1'(x_1) \left((\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r) \|\zeta\|_2^2 - 2b_1 \|\zeta\|_2 r \right) \end{aligned} \quad (52)$$

式中, $r = \sqrt{1 + p_{12}^2}$ 。

当 $b_1 = 0$ 时, $\dot{V}(x)$ 为

$$\dot{V}(x) = -\varphi_1'(x_1) (\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r) \|\zeta\|_2^2 \quad (53)$$

为使李雅普诺夫导数负定, 应有

$$b_2 < \frac{\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \}}{2r}$$

按照式(24)至式(30)易得其到达时间。

当 $b_1 > 0$ 时, $\dot{V}(x)$ 为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\varphi_1'(x_1) [(\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r) \|\zeta\|_2^2 - \\ &2b_1 \|\zeta\|_2 r] \leq -\varphi_1'(x_1) (\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r) \|\zeta\|_2 \leq (54) \\ &-\varphi_1'(x_1) (\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r) \frac{V^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} \{ \mathbf{P} \}} \end{aligned}$$

为使李雅普诺夫导数负定, 应有

$$\begin{cases} b_2 < \frac{\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \}}{2r} \\ b_1 \leq \frac{(\lambda_{\min} \{ \mathbf{Q}_R \} - 2b_2 r)(1 - \kappa) \|\zeta\|_2}{2r}, 0 < \kappa < 1 \end{cases} \quad (55)$$

4 仿真结果分析

为了验证控制方案的有效性，对改进超螺旋快速终端滑模控制器(NSTSMC)与PI控制器、普通滑模控制器(SMC)、全局快速终端滑模控制器(FTSMC)以及经典超螺旋快速终端滑模控制器(STSMC)进行对比仿真。利用MATLAB/Simulink搭建系统仿真模型，电机参数见表1，各个控制器电流环参数相同，电压限幅为±560 V。给定电机1 000 r/min参考转速下，电机的速度响应仿真曲线如图2所示。

表 1 永磁同步电机参数
Tab. 1 Parameters of PMSM

参数	值	参数	值
定子电阻 R_s/Ω	0.05	转子磁链 $\psi_f/(V \cdot s)$	0.192
等效电感 L/H	0.000 795	磁极对数 P	4
转动惯量 $J/(kg \cdot m^2)$	0.011	粘滞系数 $B/(N \cdot m \cdot s)$	0.001 417

电机在 0.05 s 时加 50 N·m 负载，并在 0.1 s 时卸去，仿真结果如图 2 所示。

由图 2(a)可知，由于 PI 控制器需要获得较好的抗扰动性能，不可避免会有较大的超调。而普通滑模控制(SMC)无法在有限时间收敛到零，其稳态误差随时间减小，起始误差与滑模面中误差的系数有关。经典超螺旋算法(STSMC)由于缺少线性项，导致其远离平衡点时收敛速度最慢。快速终端滑模控制既没有较大的超调，也能快速收敛到零，拥有最优秀的动态响应特性。改进的超螺旋算法(NSTSMC)超调较小，也能快速收敛到零，仅次于快速终端滑模控制。

由图 2(b)可知，快速终端滑模控制和改进超螺旋快速终端滑模控制均有较强的鲁棒性。快速终端滑模控制收敛时间更短，但只能收敛到平衡点某一较大邻域内，而快速终端滑模控制能够收敛到更小的邻域内。图 2(c)显示相比经典超螺旋滑模控制和快速终端滑模控制，改进超螺旋算法能使系统稳态误差更小，这是由非线性项的指数决定的。控制可调的指数可使系统收敛到更小的邻域内。

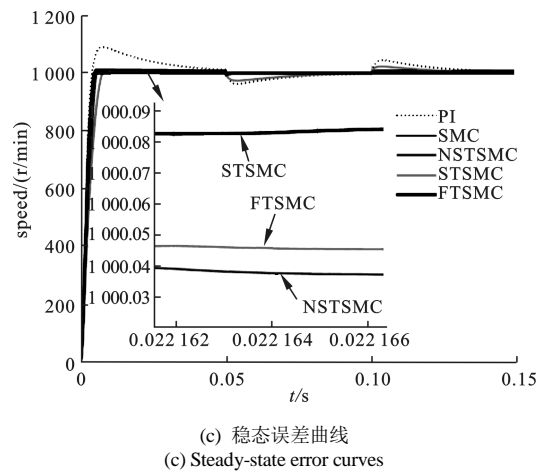
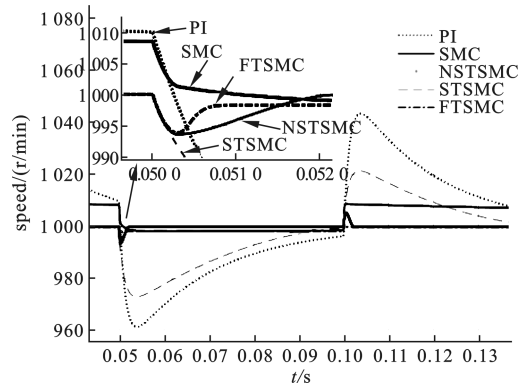
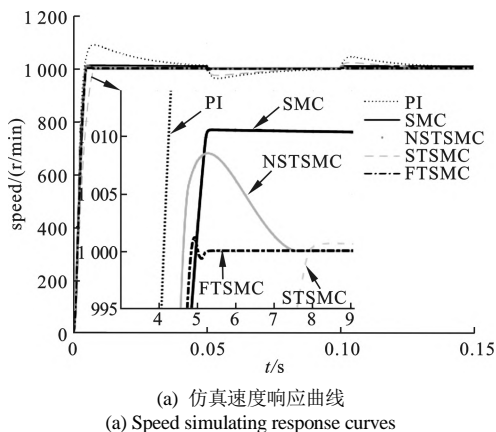


图 2 定常扰动仿真结果

Fig. 2 Time-invariant disturbance simulation results

时变负载扰动下的速度仿真曲线如图 3 所示。电机增加大小为 25 N·m，频率为 25 Hz 的时变扰动，分别对改进超螺旋快速终端滑模控制和快速终端滑模控制进行仿真。仿真结果表明，改进超螺旋快速终端滑模控制对时变扰动不敏感，具有更好的抗时变扰动性能。

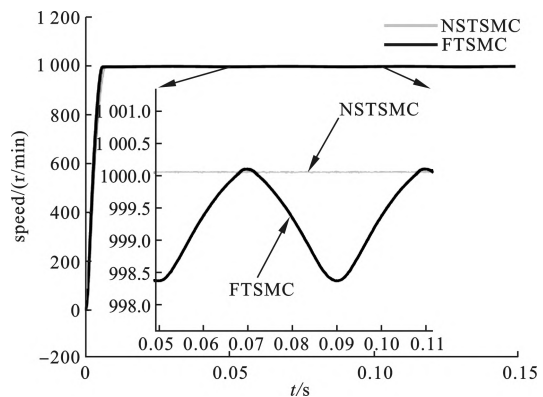
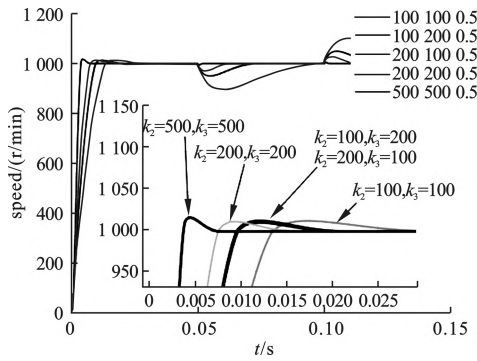


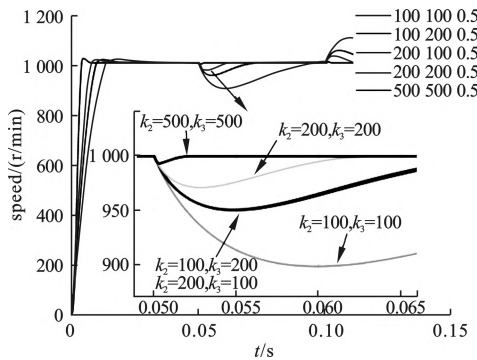
图 3 时变负载扰动下的速度仿真曲线
Fig. 3 Speed simulating curves in the case of time varying disturbance

为确定不同参数的选择对系统控制性能的影响，进行改进超螺旋快速终端滑模控制器不同参数的仿真。同样在 0.05 s 时增加 50 N·m 的负载，并

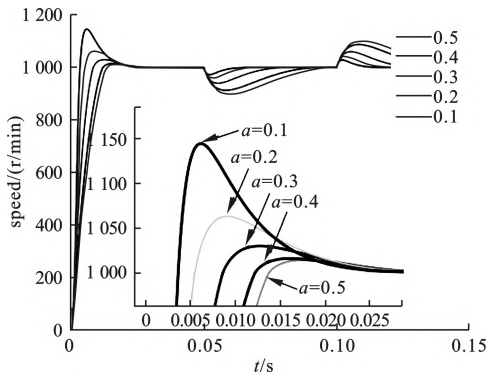
在 0.1 s 时卸去。仿真结果如图 4 所示。



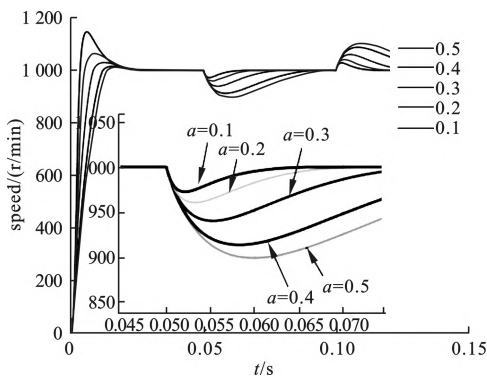
(a) 不同 k_2 、 k_3 值下的速度仿真响应曲线
(a) Speed simulating responses curves under different k_2, k_3 values



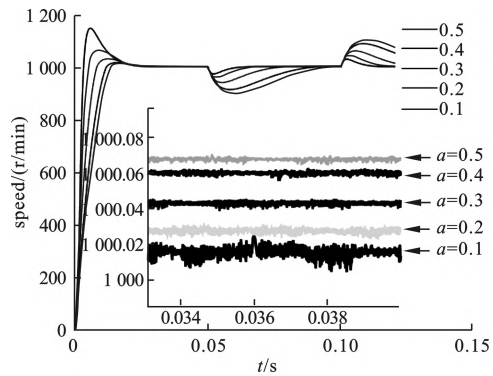
(b) 不同 k_2 、 k_3 值时负载扰动下速度仿真曲线
(b) Speed simulating response curves under different k_2, k_3 values in the case of load disturbance



(c) 不同非线性项指数下的速度仿真曲线
(c) Speed simulating response curves under different nonlinear exponential values



(d) 不同非线性项指数下的负载扰动速度仿真曲线
(d) Speed simulating response curves in the case of load disturbance under different nonlinear exponential values



(e) 不同非线性项指数下的稳态误差曲线
(e) Simulation steady-state error curves under different nonlinear exponential values

图 4 不同参数下的仿真结果
Fig. 4 Simulation results under different parameters

由图 4(a)和图 4(b)可知 k_2 、 k_3 越大，系统的抗扰动性能越好，动态响应速度越快。但实际应用过程中受限于硬件计算速度和电流限制， k_2 、 k_3 值不可能无限制增加下去。由图 4(c)至图 4(e)可知，减小非线性项指数值会增大超调，增加抗扰动性能，减小稳态误差，逼近平衡态更小的邻域。但指数过小会导致扰动放大，使系统变得不稳定。灵活地选择各个参数可获得更好的系统控制性能。

5 结论

本文针对 PMSM 调速系统动态性能及抗扰动能力，设计了一种改进超螺旋算法与终端滑模控制相结合的速度控制器，解决了经典超螺旋算法存在的收敛速度慢、参数选取依赖干扰边界信息，状态向量的指数始终为 1/2 不能使滑模面系统状态收敛到更小的邻域内等缺点，提高了系统在时变扰动下的抗扰动性能，减小了稳态误差，理论分析与仿真验证了算法的可行性和有效性。

参考文献(References)

- [1] 刘京, 李洪文, 邓永停. 基于扰动观测器的永磁同步电机电流环自适应滑模控制[J]. 光学精密工程, 2017, 25(5): 1229-1241. Liu J, Li H W, Deng Y T. Current Adaptive Sliding Mode Control Based on Disturbance Observer for Permanent Magnet Synchronous Motor [J]. Optics and Precision Engineering, 2017, 25(5): 1229-1241.
- [2] 邓永停, 刘军, 李洪文, 等. 基于分段弧形永磁同步电机的 4 m 望远镜控制系统[J]. 光学精密工程, 2020, 28(3): 591-600. Deng Y T, Liu J, Li H W, et al. Control System of 4 m Telescope Based on Segmented Permanent Magnet Arc Synchronous Motor[J]. Optics and Precision Engineering, 2020, 28(3): 591-600.
- [3] Ramírez V R, Aguilar L T, Luis N C, et al. Sensorless H_∞ Speed-tracking Synthesis for Surface-mount Permanent Magnet Synchronous Motor[J]. ISA Transactions, 2017, 67: 140-150.
- [4] Kim S K. Robust Adaptive Speed Regulator with Self-tuning Law for Surfaced-mounted Permanent Magnet Synchronous Motor[J]. Control Engineering Practice, 2017, 61(4): 55-71.
- [5] Fayed F M. El-Sousy. Intelligent Mixed H_2/H_∞ Adaptive Tracking

- Control System Design Using Self-organizing Recurrent Fuzzy-wavelet-neural-network for Uncertain Two-axis Motion Control System[J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 41: 22-50.
- [6] Xia P, Deng Y, Wang Z, et al. Speed Adaptive Sliding Mode Control with an Extended State Observer for Permanent Magnet Synchronous Motor[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018: 6405923.
- [7] Li Z, Hu G, Cui J, et al. Sliding-mode Variable Structure Control with Integral Action for Permanent Magnet Synchronous Motor[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2014, 34(3): 431-437.
- [8] Suleimenov K, Ali M H, Do T D. Integral Sliding Mode Controller Design for Permanent Magnet Synchronous Machines[C]. *Dong Hoi: International Conference on System Science and Engineering*, 2019.
- [9] Yan J, Wang H, Huang S, et al. Load Disturbance Observer-based Complementary Sliding Mode Control for PMSM of the Mine Traction Electric Locomotive[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(4): 1051-1058.
- [10] Li P, Zhu G L. Robust Internal Model Control of Servo Motor Based on Sliding Mode Control Approach[J]. *ISA Transactions*, 2019, 93: 199-208.
- [11] Ganapathy R A, Santha K R. Design of an Adaptive Gain Variation Sliding Mode Control Algorithm for Extended Non-singular Terminal Sliding Mode Observer Based Sensorless PMSM Drive[J]. *International Journal of Applied Engineering Research*, 2019, 14(1): 62-68.
- [12] 刘伟, 张茂青, 王力, 等. 变结构控制系统的抖振问题[J]. *江苏电器*, 2008(5): 1-2, 45.
Liu W, Zhang M Q, Wang L, et al. Chattering Problem in Variable Structure Control System[J]. *Jiangsu Electric*, 2008(5): 1-2, 45.
- [13] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真基本理论与设计方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.
Liu J K. Sliding Mode Control Design and MATLAB Simulation: The Basic Theory and Design Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [14] 淡宁, 袁宇浩, 冯进. 基于快速 STA 与扰动观测器的 PMSM 滑模控制[J]. *计算机仿真*: 2020, 37(10): 173-178.
Dan N, Yuan Y H, Feng J. Sliding Mode Control of PMSM Based on Fast STA and Disturbance Observer[J]. *Computer Simulation*: 2020, 37(10): 173-178.
- [15] 杨芳, 张宽桥, 余磊. 自适应非奇异快速终端二阶滑模制导律[J]. *弹道学报*, 2020, 32(2): 7-15.
Yang F, Zhang K Q, Yu L. Adaptive Nonsingular Fast Terminal Second-order Sliding Mode Guidance Law[J]. *Journal of Ballistics*, 2020, 32(2): 7-15.
- [16] 涂宇, 王怡, 吴志海, 等. 基于超扭曲算法的解耦非奇异快速终端滑模[J]. *控制工程*, 2020, 27(2): 271-277.
Tu Y, Wang Y, Wu Z H, et al. Decoupled Nonsingular Fast Terminal Sliding Mode Control Based on Super Twisted Algorithm[J]. *Control Engineering of China*, 2020, 27(2): 271-277.
- [17] 袁雷, 胡冰新, 魏克银, 等. 现代永磁同步电机控制原理及 MATLAB 仿真[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2016.
Yuan L, Hu B X, Wei K Y, et al. Modern Permanent Magnet Synchronous Motor Control Principle and MATLAB Simulation[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2016.
- [18] 华玉龙, 孙伟, 迟宝山, 等. 非奇异快速终端滑模控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2017(5): 1119-1125.
Hua Y L, Sun W, Chi B S, et al. Study on Nonsingular Fast Terminal Sliding Mode Control[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017(5): 1119-1125.
- [19] Shtessel Y, Edwards C, Fridman L, et al. Sliding Mode Control and Observation[M]. New York: Springer, 2014.
- [20] Seeber R, Horn M. Stability Proof for a Well-established Super-twisting Parameter Setting[J]. *Automatica*, 2017, 84: 241-243.
- [21] Moreno J A, Osorio M. Strict Lyapunov Functions for the Super-twisting Algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035-1040.
- [22] Moreno J A. A Linear Framework for the Robust Stability Analysis of a Generalized Super-twisting Algorithm[C]. *Wuhan: International Conference on Electrical Engineering*, 2010.
- [23] Khan I, Bhatti A I, Arshad A, et al. Robustness and Performance Parameterization of Smooth Second Order Sliding Mode Control[J]. *International Journal of Control Automation & Systems*, 2016, 14(3): 681-690.