

幂函数正弦柔性铰链设计与分析

李佳彪^{1,2} 赵阳¹ 吴清文^{1,2} 母德强³ 刘昌儒¹ 胡金鑫¹

(1 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

(2 中国科学院大学, 北京 100049)

(3 长春工业大学 机电工程学院, 吉林 长春 130012)

摘要 提出了一种新型幂函数正弦柔性铰链, 利用卡氏第二定理推导了柔性铰链的柔度与转动精度计算公式, 并取不同参数值对柔度和转动精度进行了有限元仿真分析和理论值计算, 相对误差在10%以内, 验证了计算公式的正确性; 分析了柔性铰链的曲线方程参数对铰链性能的影响。结果表明, 最小厚度对柔性铰链的性能影响最大。此外, 将椭圆、双曲线与新型铰链进行了对比。结果表明, 椭圆柔性铰链的柔度最大, 但是转动精度最小; 双曲线柔性铰链的转动精度最大, 但是柔度最小。通过引入柔度精度比 β , 分析对比得知, 在相同 L 的情况下, 改变 d , 幂函数正弦柔性铰链的 β 值分别比椭圆和双曲线柔性铰链平均提高了2.68倍和1.237倍; 在相同 d 的情况下, 改变 L , 幂函数正弦柔性铰链的 β 值分别比椭圆和双曲线柔性铰链平均提高了2.60倍和1.18倍。表明幂函数正弦柔性铰链的综合性能更有优势。

关键词 柔性铰链 幂函数正弦 柔度 转动精度 有限元分析

Design and Analysis of Power-function-sine Flexure Hinges

Li Jiabiao^{1,2} Zhao Yang¹ Wu Qingwen^{1,2} Mu Deqiang³ Liu Changru¹ Hu Jinxin¹

(1 Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

(2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

(3 School of Mechatronic Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)

Abstract In this study, a new type of power-function-sine flexure hinge is proposed. The calculation formula of compliance and rotation accuracy of the flexure hinge is derived by using Castigliano's second theorem. The finite element simulation analysis and theoretical value calculation of compliance and rotation accuracy are carried out by taking different parameter values. The relative error is less than 10%, which verifies the correctness of the calculation formula. The influence of curve equation parameters of the flexure hinge on the performance of the flexure hinge is analyzed. The results show that the minimum thickness has the greatest influence on the performance of the flexure hinge. In addition, the ellipse and hyperbola are compared with the new hinge. The results show that the ellipse flexure hinge has the greatest compliance, but the rotation accuracy is the smallest; the hyperbolic flexure hinge has the highest rotation accuracy, but the lowest compliance. By introducing the compliance accuracy ratio β , through analysis and comparison, it is known that under the same L and the changing d , the value of the power function sine flexure hinge β is 2.68 times and 1.237 times higher than those of elliptical and hyperbola flexure hinges respectively. With the same flexure hinge diameter and the changing length, the value of the power function of sinusoidal flexure hinge β is 2.60 times and 1.18 times higher than that of elliptic and hyperbolic flexure hinges respectively. It shows that the power function sinusoidal flexure hinge has more advantages in comprehensive performance.

Key words Flexure hinge Power-function-sine Compliance Rotation accuracy Finite element analysis

0 引言

随着精密机械、光学设备仪器、精密测量等学科领域的发展,柔性机构的应用越来越广泛^[1]。其中,柔性铰链作为柔性机构的关键部分,具有无摩擦、体积小、无间隙、运动灵敏度高等优点^[2-3]。

柔性铰链在国内外已有广泛研究。Paros等^[4]最早研究了直圆型柔性铰链,并提出了理论计算公式。吴鹰飞等^[5]对直圆型柔性铰链的计算公式进行了简化。Lobontiu等^[6]利用卡氏第二定理,通过对比圆型、椭圆型、双曲线型、抛物线型4种类型的柔性铰链,得出了椭圆型柔性铰链的柔度更好,双曲线型柔性铰链的转动精度更好的结论。张志杰等^[7-8]通过建立一般柔性铰链的数学模型,分别计算了直圆、正割曲线、双曲线、抛物线型柔性铰链的柔度。Tian等^[9]提出了一种新型的圆角V型柔性铰链,并推导出柔度方程和运动精度方程。张伟等^[10]提出双边直圆抛物线复合柔性铰链,融合了直圆和抛物线柔性铰链的优点,提高了其转动能力。Li等^[11]提出了一种基于广义解析柔度模型矩阵的方法来建立混合弯曲铰链的柔度和精度方程,该模型还可用于处理形状复杂的铰链类型。王传礼等^[12]设计了椭圆导角混合柔性铰链,在回转能力上有显著优势。

随着光学稀疏孔径技术的发展,采用刚性铰链的传统调整平台,已达不到所需要的纳米级别精度,因此,对光学定位调整装置的精度要求越来越高,对柔性铰链的柔度和精度的要求也越来越高。Liu等^[13]利用拓扑优化方法设计了准V型柔性铰链,与圆角V型柔性铰链相比,具有更高的旋转精度,但是柔度较小。Li等^[14]提出了幂函数型柔性铰链,与直圆型柔性铰链和V型柔性铰链相比,具有更高的运动精度。Wang等^[15]提出了一种具有非对称结构的新型指数正弦柔性铰链,并采用一种新颖的基于有限梁的矩阵建模方法来计算柔度矩阵和运动精度。

本文提出了一种新型的曲线形式:幂函数正弦型柔性铰链,利用卡氏第二定理推导出柔度运动精度方程,进行了有限元仿真分析;通过对比两种方法得到的结果,验证了方程的正确性。同时,分析了曲线中参数对其柔度和运动精度的影响,通过与椭圆和双曲线对比发现,该曲线形式具有更好的综合性能。

1 幂函数正弦柔性铰链的结构

图1所示为幂函数正弦柔性铰链的平面结构。柔性铰链的直径为 d ,长度为 L ,最小厚度为 t 。其缺口形函数的表达式为

$$y = a \times [b(x - \frac{\pi}{b}) \sin b(x - \frac{\pi}{b})] - \beta + t/2 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

$$\begin{cases} L = \frac{\pi}{b} \\ \beta = \min \{ a \times [b(x - \frac{\pi}{b}) \sin b(x - \frac{\pi}{b})] \} \end{cases} \quad (2)$$

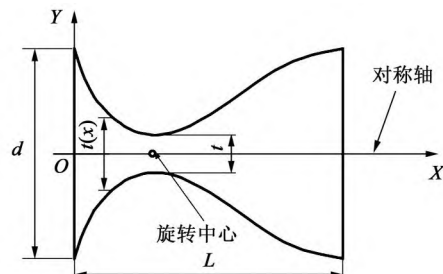
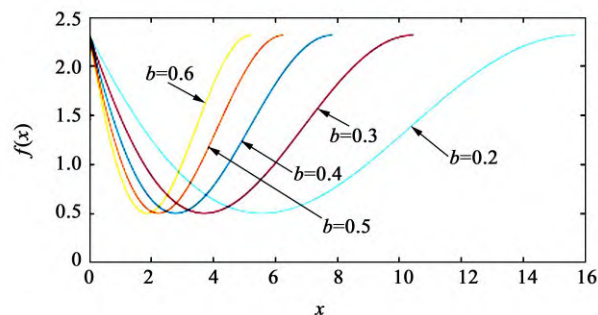


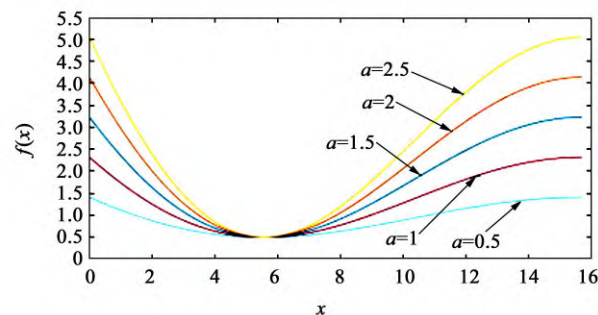
图1 柔性铰链理论结构模型

Fig. 1 Theoretical structure model of the flexure hinge

参数 a 决定曲线的深度,参数 b 决定曲线的宽度。如图2所示,参数 a 和 b 决定了柔性铰链的长度和深度。图2(a)所示为当 $a=1$ 时不同 b 所对应的曲线,其中 b 从0.2到0.6。图2(b)所示为当 $b=0.2$ 时不同 a 所对应的曲线,其中 a 从0.5到2.5。



(a) $a=1$



(b) $b=0.2$

图2 柔性铰链曲线的轮廓

Fig. 2 Outline of the flexure hinge curves

旋转中心一般为柔性铰链的最小厚度,也就是曲线的最低点。对于幂函数正弦曲线,最低点(旋转中心)可以由下式确定:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= ab \sin [b(x - \frac{\pi}{b})] + \\ &ab [b(x - \frac{\pi}{b}) \cos b(x - \frac{\pi}{b})] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2 柔性铰链的理论计算

2.1 幂函数正弦柔性铰链柔度的计算

在计算幂函数正弦柔性铰链柔度时, 基于以下假设:

- 1) 铰链形变只产生在曲线部分。
- 2) 柔性铰链在建模和分析时为小变形欧拉-伯努利梁, 弯矩和力使得铰链产生弯曲; 考虑轴向载荷, 而忽略剪切和扭转带来的影响。
- 3) 柔性铰链一端固定、另一端自由, 并施加一组力矩 M_{z1} 及水平力 F_{x1} 、垂直力 F_{y1} , 如图3所示。

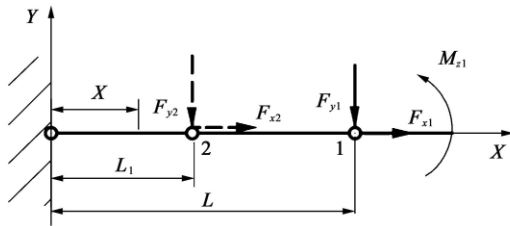


图3 柔性铰链受力示意图
Fig. 3 Schematic diagram of the flexure hinge force

由图3可知, 转动力矩 M_{z1} 及垂直力 F_{y1} 会使铰链在 Z 轴方向产生一个角位移 θ , 并使铰链产生沿 Y 轴方向的拉伸或压缩运动, 产生微小位移 y ; 水平力 F_{x1} 使铰链产生沿 X 轴方向的拉伸或压缩运动, 产生微小位移 x 。图3所示的位移-载荷关系在自由端1点处为

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ y_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{z1} \\ F_{y1} \\ F_{x1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

根据卡氏第二定理可知

$$\begin{cases} \theta_{z1} = \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} \\ y_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{y1}} \\ x_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{x1}} \end{cases}$$

由材料力学可知, 柔性铰链的弹性应变能为

$$U = \frac{1}{2} \left(\int \frac{F_x^2}{EA(x)} dx + \int \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right) \quad (5)$$

式中, E 为材料的弹性模量; $A(x)$ 为铰链的横截面面积; $I_z(x)$ 为转动惯量。有

$$\begin{cases} A(x) = \frac{\pi t^2(x)}{4} \\ I_z(x) = \frac{\pi t^4(x)}{64} \end{cases} \quad (6)$$

这里的轴向力和弯矩分别为

$$\begin{cases} F_x = F_{x1} \\ M_z = M_{z1} - F_{y1}(L - x) \end{cases} \quad (7)$$

由式(4)~式(7)可以计算出柔性铰链的柔度为

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{64}{\pi E} \int \frac{dx}{t^4(x)} \\ C_{12} = C_{21} = -\frac{64}{\pi E} \int \frac{(L-x)dx}{t^4(x)} \\ C_{22} = \frac{64}{\pi E} \int \frac{(L-x)^2 dx}{t^4(x)} \\ C_{33} = \frac{4}{\pi E} \int \frac{dx}{t^2(x)} \end{cases} \quad (8)$$

铰链的可变厚度函数 $t(x)$ 的表达式为

$$t(x) = 2y(0 \leq x \leq L) \quad (9)$$

2.2 幂函数正弦柔性铰链运动精度的计算

在理想情况下, 柔性铰链的旋转中心固定不变。实际上, 柔性铰链在弯矩和力的作用下, 转动中心不再固定, 会产生微小偏移, 即发生小量级的寄生运动(中心点2会产生沿 x 轴、 y 轴的位移), 从而导致柔性铰链的运动不精准, 对其转动精度产生影响。铰链的转动精度可由铰链的最小厚度处(图3中的点2)的柔度代替。为了求点2的柔度, 类似于求解铰链柔度的方法, 在中心点2施加一组虚拟载荷, 即水平力 F_{x2} 、垂直力 F_{y2} , 如图3所示。同理, 可利用卡氏第二定理求得点2处的位移, 即

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ y_2 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{z1} \\ F_{y1} \\ F_{x1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

根据卡氏第二定理可知

$$\begin{cases} y_2 = \frac{\partial U_e}{\partial F_{y2}} \\ x_2 = \frac{\partial U_e}{\partial F_{x2}} \end{cases}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \left(\int \frac{F_x'^2}{EA(x)} dx + \int \frac{M_z'^2}{EI_z(x)} dx \right) \quad (11)$$

$$\begin{cases} F_x' = F_{x1} + F_{x2} \\ M_z' = M_{z1} - F_{y1}(L - x) - F_{y2}(L_1 - x) \end{cases} \quad (12)$$

由式(6)、式(10)、式(11)、式(12)可以计算出柔性铰链的精度系数为

$$\begin{cases} C'_{21} = -\frac{64}{\pi E} \int \frac{(L_1-x)dx}{t^4(x)} \\ C'_{22} = \frac{64}{\pi E} \int \frac{(L-x)(L_1-x)dx}{t^4(x)} \\ C'_{33} = \frac{4}{\pi E} \int \frac{dx}{t^2(x)} \end{cases} \quad (13)$$

3 柔性铰链有限元验证

为了验证分析幂函数正弦铰链柔度和精度公式

的正确性,首先对其进行实例计算。计算与分析中均采用铍青铜材料,材料参数 $E=128\text{ GPa}$, $\mu=0.35$ 。如表1所示,取不同尺寸参数,将每组参数分别代入柔性铰链柔度性能公式(8)、转动精度公式(13)得到理论计算结果。通过有限元软件进行静力学分析,其中, $F_{x1}=F_{y1}=1\text{ N}$, $M_{z1}=1\text{ N}\cdot\text{mm}$ 。图4所示为以第二组结构参数组成的柔性铰链有限元结构模型。表2和表3所示分别为柔性铰链的柔度和转动精度的解析解与有限元解的结果对比。计算得出柔度的相对误差小于5%,转动精度的相对误差小于9%。由此验证了式(8)和式(10)的正确性。

表1 柔性铰链参数

Tab. 1 Flexure hinge parameters

| 序号 | t/mm | a/mm | b/mm |
|----|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 1 | 1 | 0.3 |
| 2 | 1 | 1.2 | 0.3 |
| 3 | 0.5 | 1 | 0.35 |
| 4 | 0.5 | 1.5 | 0.35 |
| 5 | 0.5 | 2 | 0.35 |

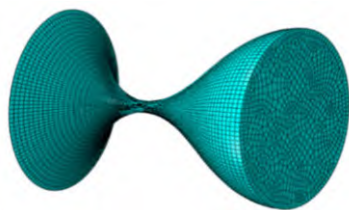


图4 柔性铰链有限元模型

Fig. 4 Finite element model of the flexure hinge

4 柔性铰链性能分析

4.1 结构参数对柔度和精度的影响

为了更好地设计出符合要求的柔性铰链,在设计计算中,需要了解柔性铰链公式中的参数和柔度及转动精度之间的关系。该模型有3个参数控制其形状,即 a 、 b 、 t 。固定其中两个参数,在一定范围内改变一个参数,利用公式求出不同参数下柔度和精度的大小,就可以得到某一参数对柔度和精度性能的影响。

如图5所示,参数 b 和 t 分别设置为 0.3 mm 和 1 mm ,参数 a 的范围为 $1\sim 2.5\text{ mm}$ 。由图5可以看出,柔度 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{22} 、 C_{33} 会随着参数 a 的增加而非线性减小;转动中心柔度 C'_{12} 、 C'_{22} 、 C'_{33} 会随着参数 a 的增加而非线性减小;回转精度相应地随着参数 a 的增加而非线性增大。如图6所示,参数 a 和 t 分别设

表2 柔度的解析解与有限元解比较

Tab. 2 Comparison of analytical solution and finite element solution for C_{ij} compliance factors

| 序号 | | $C_{11}/[10^{-4}/(\text{N}\cdot\text{mm})]$ | $C_{12}/(10^{-3}/\text{N})$ | $C_{22}/(10^{-2}/\text{N}\cdot\text{mm})$ | $C_{33}/(10^{-5}/\text{N}\cdot\text{mm})$ |
|----|--------|---|-----------------------------|---|---|
| 1 | 解析解 | 3.238 | 2.154 | 1.465 | 3.271 |
| | 有限元解 | 3.217 | 2.140 | 1.466 | 3.313 |
| | 相对误差/% | 0.643 | 0.640 | 0.060 | 1.260 |
| 2 | 解析解 | 2.944 | 1.965 | 1.335 | 2.985 |
| | 有限元解 | 2.932 | 1.957 | 1.340 | 3.055 |
| | 相对误差/% | 0.398 | 0.388 | 0.325 | 2.309 |
| 3 | 解析解 | 31.04 | 17.86 | 10.38 | 7.883 |
| | 有限元解 | 30.01 | 17.27 | 10.06 | 7.929 |
| | 相对误差/% | 3.149 | 3.441 | 3.182 | 0.581 |
| 4 | 解析解 | 25.25 | 14.57 | 8.462 | 6.400 |
| | 有限元解 | 24.23 | 13.98 | 8.140 | 6.554 |
| | 相对误差/% | 4.199 | 4.218 | 3.955 | 2.347 |
| 5 | 解析解 | 21.83 | 12.61 | 7.321 | 5.522 |
| | 有限元解 | 20.80 | 12.01 | 6.991 | 5.757 |
| | 相对误差/% | 4.952 | 4.974 | 4.713 | 4.077 |

表3 转动精度的解析解与有限元解比较

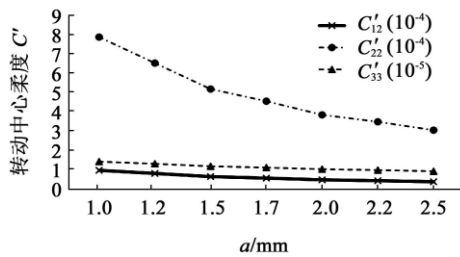
Tab. 3 Comparison of analytical solution and finite element solution for C'_{ij} rotational accuracy

| 序号 | | $C'_{12}/(10^{-4}/\text{N})$ | $C'_{22}/(10^{-4}/\text{N}\cdot\text{mm})$ | $C'_{33}/(10^{-5}/\text{N}\cdot\text{mm})$ |
|----|--------|------------------------------|--|--|
| 1 | 解析解 | 1.006 | 7.912 | 1.456 |
| | 有限元解 | 1.029 | 8.517 | 1.477 |
| | 相对误差/% | 2.252 | 7.116 | 1.450 |
| 2 | 解析解 | 8.435 | 6.564 | 1.343 |
| | 有限元解 | 8.685 | 7.157 | 1.379 |
| | 相对误差/% | 2.884 | 8.291 | 2.606 |
| 3 | 解析解 | 6.032 | 39.11 | 3.645 |
| | 有限元解 | 6.078 | 40.50 | 3.674 |
| | 相对误差/% | 0.760 | 3.425 | 0.776 |
| 4 | 解析解 | 4.056 | 25.81 | 3.009 |
| | 有限元解 | 4.090 | 26.95 | 3.091 |
| | 相对误差/% | 0.846 | 4.234 | 2.632 |
| 5 | 解析解 | 3.058 | 19.23 | 2.621 |
| | 有限元解 | 3.079 | 20.18 | 2.740 |
| | 相对误差/% | 0.675 | 4.676 | 4.327 |

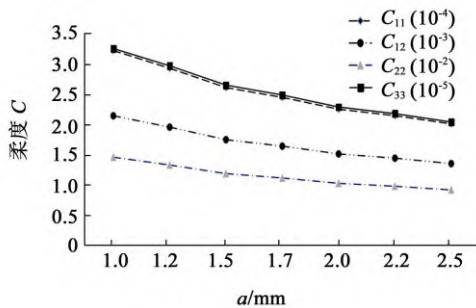
置为 1.5 mm 和 1 mm ,参数 b 的范围为 $0.2\sim 0.8\text{ mm}$ 。由图6可以看出,柔度 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{22} 、 C_{33} 会随着参数 b 的增加而非线性减小;转动中心柔度 C'_{12} 、 C'_{22} 、 C'_{33}

会随着参数 b 的增加而非线性减小; 回转精度相应地随着参数 b 的增加而非线性增大。如图7所示, 参数 a 和 b 分别设置为 1 mm 和 0.3 mm, 参数 t 的范围为 0.4~1.4 mm。由图7可以看出, 柔度 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{22} 、 C_{33} 会随着参数 t 的增加而非线性减小; 转动中心柔度 C'_{12} 、 C'_{22} 、 C'_{33} 会随着参数 t 的增加而非线性减小; 回转精度相应地随着参数 t 的增加而非线性增大。

由图5~图7可以看出, 参数 t 对柔度和回转精度的影响最大; 也可以发现, 柔度和回转精度随着参数的改变, 变化趋势是呈相反性的。



(a) 参数 a 对柔度的影响



(b) 参数 a 对转动精度的影响

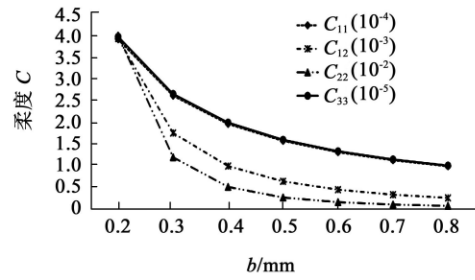
图5 参数 a 对柔性铰链性能的影响

Fig. 5 Influence of parameter a on flexure hinge performance

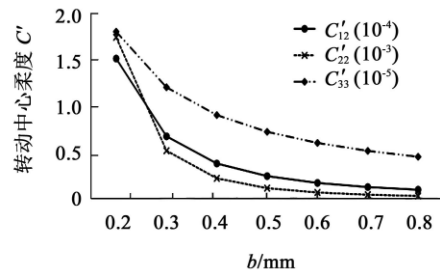
4.2 与其他类型柔性铰链的比较

一般来说, 直圆、椭圆、抛物线、双曲线等为常规的柔性铰链的类型。椭圆型柔性铰链有较高的柔度; 双曲线型柔性铰链有较好的回转精度。但是, 通常柔度和回转精度的变化是呈相反的趋势的, 因此, 单一增加柔度必会导致回转精度的降低。为了合理、综合性地考虑柔性铰链的性能, 可用柔度与精度的比值 β 来判断柔性铰链的性能, 即比值越大柔性铰链的性能越好。定义 $C_1=C_{11}+C_{12}+C_{22}+C_{33}$, $C_2=C'_{12}+C'_{22}+C'_{33}$, $\beta=C_1/C_2$ 。

由图8可知, 在保证 L 不变的情况下, 3种曲线类型的 C_1 都随 b 的增大而非线性减小, C_2 随 b 的增大而非线性减小。由图9可知, 在保证 b 不变的情况下, 3种类型的 C_1 均随 L 的增大而非线性增大, C_2 随 L 的增大而非线性增大。由图8、图9可知, 在柔度



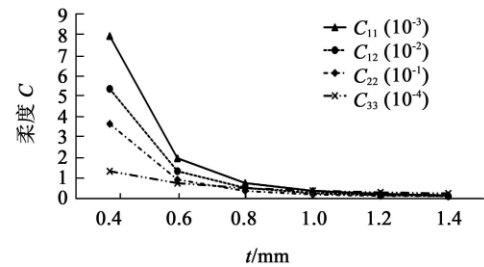
(a) 参数 b 对柔度的影响



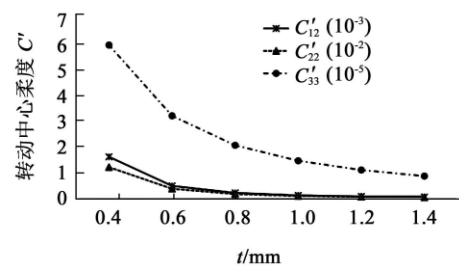
(b) 参数 b 对转动精度的影响

图6 参数 b 对柔性铰链性能的影响

Fig. 6 Influence of parameter b on flexure hinge performance



(a) 参数 t 对柔度的影响



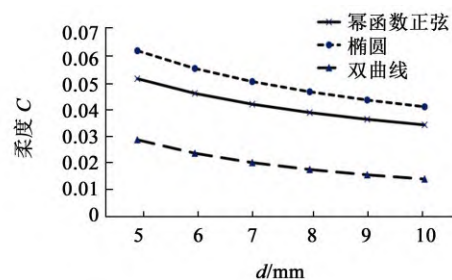
(b) 参数 t 对转动精度的影响

图7 参数 t 对柔性铰链性能的影响

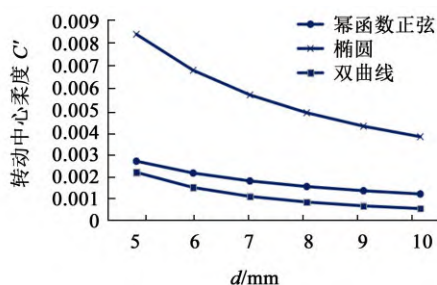
Fig. 7 Influence of parameter t on flexure hinge performance

方面, 椭圆型要优于其他两种; 在回转精度方面, 双曲线型要更好一些。

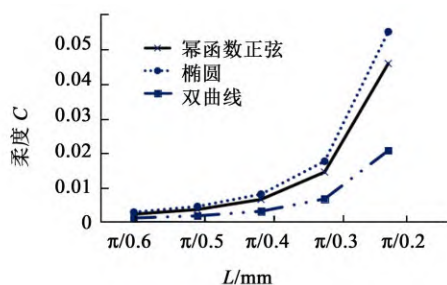
由图10可知, 在保证 L 不变, 改变 d 的情况下, β 随 d 的增加而非线性增大。其中, 幂函数正弦柔性铰链的 β 值是椭圆型柔性铰链的倍数, 分别为 2.636、2.666、2.684、2.693、2.699、2.701, 平均为 2.68 倍; 幂函数正弦柔性铰链的 β 值是双曲线型柔性铰链的倍数, 分别为 1.458、1.348、1.257、1.181、1.116、1.062, 平均为 1.237 倍。在保证 d



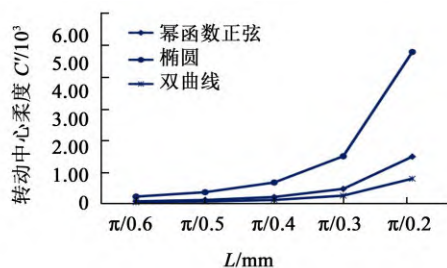
(a) 刚度对比



(b) 转动精度对比

图8 不同类型柔性铰链对比(b 变化)Fig. 8 Comparison of different types of flexure hinges (change parameter b)

(a) 刚度对比

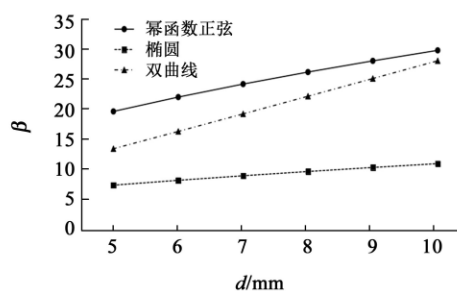
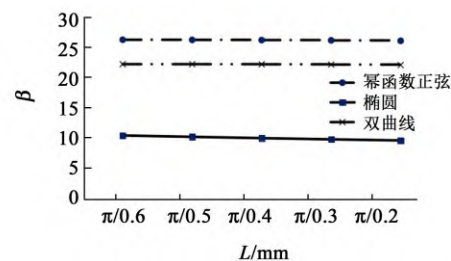


(b) 转动精度对比

图9 不同类型柔性铰链对比(L 变化)Fig. 9 Comparison of different types of flexure hinges (change parameter L)

不变, 改变 L 的情况下, β 随 L 的增加而非线性减小。其中, 幂函数正弦柔性铰链的 β 值是椭圆型柔性铰链的倍数, 分别为 2.501、2.554、2.605、2.652、2.693, 平均为 2.60 倍; 幂函数正弦柔性铰链的 β 值是双曲线型柔性铰链的倍数, 分别为 1.181、1.180、1.179、1.180、1.181, 平均为 1.18 倍。综合来看, 在引入刚度与精度比值的情况下, 与双曲线型和椭

圆型相比, 幂函数正弦柔性铰链的性能更好。

(a) 控制 L 不变(b) 控制 d 不变图10 参数对刚度与精度的比值 β 的影响Fig. 10 Influence of parameters on β

5 总结

介绍了一种新型柔性铰链: 幂函数正弦柔性铰链。基于材料力学悬臂梁理论, 以卡氏第二定理为基础, 推导了柔性铰链刚度及转动精度方程, 并进行了有限元仿真计算, 得出刚度的理论解和仿真分析解之间的误差相对小于5%, 转动精度理论解和仿真分析解之间的误差相对小于9%, 均在10%以内, 验证了理论公式的正确性。根据柔性铰链曲线的形式, 分析讨论了不同的结构参数对刚度和转动精度的影响。结果表明, 刚度将随着参数 a 或 b 的增加而非线性减小, 也随参数 t 的增加而非线性减小。其中, 参数 t 对其影响最大。转动精度将随着参数 a 或 b 的增加而非线性减小, 也随参数 t 的增加而非线性减小。其中, 参数 t 对其影响最大。

通过引入刚度与精度比值 β , 对比了椭圆、双曲线、幂函数正弦3种类型的柔性铰链, 得出结论: 幂函数正弦柔性铰链的综合性能优于椭圆、双曲线型柔性铰链。因此, 本文设计的幂函数正弦柔性铰链, 相较于其他常见的柔性铰链, 更适用于高精度、大行程的光学定位调整平台等领域。

参 考 文 献

- [1] 刘庆玲, 翁海珊, 邱丽芳. 新型单边直圆椭圆混合柔性铰链的刚度计算及其性能分析[J]. 工程力学, 2010, 27(10): 52-56.

- LIU Qingling, WENG Haishan, QIU Lifang. Compliances calculation and behavior analysis of the half right circular-elliptical hybrid flexure hinge[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(10): 52-56.
- [2] LIU M, ZHANG X M, FATIKOW S. Design and analysis of a multi-notched flexure hinge for compliant mechanisms[J]. Precision Engineering, 2016, 48: 292-304.
- [3] 于靖军, 宗光华, 毕树生. 全柔性机构与 MEMS[J]. 光学精密工程, 2001, 9(1): 1-5.
YU Jingjun, ZONG Guanghua, BI Shusheng. Fully compliant mechanisms and MEMS [J]. Optics and Precision Engineering, 2001, 9(1): 1-5.
- [4] PAROS J M, WEISBORD L. How to design flexure hinges[J]. Mechanical Design, 1965, 37(27): 151-156.
- [5] 吴鹰飞, 周兆英. 柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学, 2002(6): 136-140.
WU Yingfei, ZHOU Zhaoying. Design calculation of flexure hinges [J]. Engineering Mechanics, 2002(6): 136-140.
- [6] LOBONTIU N, PAINE J S N, GARCIA E, et al. Design of symmetric conic-section flexure hinges based on closed-form compliance equations [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5): 477-498.
- [7] 张志杰, 袁怡宝. 基于闭环柔度解析式的双曲线形柔性铰链研究[J]. 仪器仪表学报, 2007(6): 1055-1059.
ZHANG Zhijie, YUAN Yibao. Research on half hyperbolic flexure hinge based on closed-form compliance equations[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2007(6): 1055-1059.
- [8] 张志杰, 袁怡宝. 典型柔性铰链柔度性能的计算与分析[J]. 工程力学, 2008, 25(4): 106-110.
ZHANG Zhijie, YUAN Yibao. Compliances calculation and analysis of typical flexure hinge [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(4): 106-110.
- [9] TIAN Y, SHIRINZADEH B, ZHANG D. Closed-form compliance equations of filleted V-shaped flexure hinges for compliant mechanism design[J]. Precision Engineering, 2009, 34(3): 408-418.
- [10] 张伟, 杨立保, 李清雅, 等. 直圆抛物线复合铰链柔度研究[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(11): 258-264.
ZHANG Wei, YANG Libao, LI Qingya, et al. Research on compliance of compound circular-parabolic hinges [J]. Infrared and Laser Engineering, 2018, 47(11): 258-264.
- [11] LI L J, ZHANG D, GUO S, et al. Design, modeling and analysis of hybrid flexure hinges[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 131: 300-316.
- [12] 王传礼, 李成, 何涛, 等. 椭圆导角混合柔性铰链的设计计算与性能分析[J]. 中国机械工程, 2021, 32(9): 1017-1026.
WANG Chuanli, LI Cheng, HE Tao, et al. Design calculation and performance analysis of elliptical corner filleted hybrid flexure hinges [J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(9): 1017-1026.
- [13] LIU M, ZHANG X M, SERGEJ F. Design and analysis of a high-accuracy flexure hinge [J]. Review of Scientific Instruments, 2016, 87(5): 055106.
- [14] LI Q, PAN C N, XU X J. Closed-form compliance equations for power-function-shaped flexure hinge based on unit-load method [J]. Precision Engineering, 2013, 37(1): 135-145.
- [15] WANG R Q, ZHOU X Q, ZHU Z W. Development of a novel sort of exponent-sine-shaped flexure hinges [J]. Review of Scientific Instruments, 2013, 84(9): 095008.

收稿日期: 2022-05-29 修回日期: 2022-06-28

作者简介: 李佳彪(1998—), 男, 山西长治人, 在读硕士研究生; 主要研究方向为精密仪器设备调整及共相误差的调整; lijiaobao26@163.com。

通信作者: 赵阳(1991—), 男, 吉林省吉林人, 硕士, 助理研究员; 主要研究方向为柔性结构设计、稀疏孔径成像技术; zhaoyang9185@163.com。

