



中国测试
China Measurement & Test
ISSN 1674-5124, CN 51-1714/TB

《中国测试》网络首发论文

题目： 基于五线摆扭转频率测量的质心测量系统
作者： 张晟，梁铭涛，王智
网络首发日期： 2023-08-04
引用格式： 张晟，梁铭涛，王智. 基于五线摆扭转频率测量的质心测量系统[J/OL]. 中国测试. <https://link.cnki.net/urlid/51.1714.TB.20230804.1012.008>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

基于五线摆扭转频率测量的质心测量系统

张晟^{1,2}, 梁铭涛^{1,2}, 王智^{1,3}

(1. 国科大杭州高等研究院基础物理与数学科学学院, 浙江 杭州 310024; 2. 中国科学院大学, 北京 100049; 3. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

摘要: 测试质量是空间引力波探测仪器中惯性传感器关键组成部分, 是边长 46mm、质量约为 2kg 的正方体。为减小测试质量的质心偏离对惯性传感器精度的影响, 需要对测试质量的质心偏离量精确测量。由于测试质量的质心偏离允差仅为 3.75 μm , 以往的质心测量方法不能满足测量精度的要求, 特提出通过高精度测量五线摆的扭转振动固有频率来间接测量测试质量质心偏差。本文首先通过对五线摆的动力学分析, 给出了物体质心偏离量与五线摆固有频率之间的函数关系, 并据此分析了固有频率测量精度需求。接着, 介绍了采用衍射光栅和四象限探测器测量五线摆扭转角位移的原理。然后通过建模和电磁仿真设计了基于电磁螺线圈和永磁体的电磁驱动器。最后, 给五线摆施加振幅可控的激励脉冲, 根据记录的角位移数据拟合出五线摆的扭转振动固有频率。实验结果表明, 在初始振幅为 $3 \times 10^{-4} \text{rad}$ 的扭转振动情况下, 五线摆的固有频率测量精度为 $2.66 \times 10^{-5} \text{Hz}$, 能够满足利用五线摆法测量测试质量质心偏移的需求。

关键词: 五线摆; 固有频率; 衍射光栅; 四象限探测器; 电磁驱动

中图分类号: TH825, 0436.1 文献标识码: A

Mass center measurement system based on torsional frequency measurement of five-wire pendulum

ZHANG Sheng^{1,2}, LIANG Mingtao^{1,2}, WANG Zhi^{1,3}

(1. School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences,

(Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: The test mass (TM) is a key component of the inertial sensor in the space gravitational wave detection instrument, which is a cube with a side length of 46mm and a mass of about 2kg. In order to reduce the influence of the mass center deviation on the accuracy of inertial sensor, it is necessary to measure the mass center deviation of the TM accurately. Because the deviation of mass center of TM is only 3.75 μm , the former method of mass center measurement can't meet the requirement of measurement precision, it is proposed to measure the deviation of mass center indirectly by measuring the natural frequency of torsional vibration of five-wire pendulum with high precision. Firstly, through the dynamic analysis of the five-wire Pendulum, the functional relationship between the offset of the mass center and the natural frequency of the five-wire pendulum is given. Based on this, the precision requirement of natural frequency measurement is analyzed. Then, the method of measuring torsional angular displacement of five wire pendulum with diffraction grating and quadrant detector was introduced. Then the electromagnetic driver based on electromagnetic coil and permanent magnet was designed by modeling and electromagnetic simulation. Finally, the torsional vibration natural frequency of the five-wire pendulum was fitted according to the recorded angular displacement data. The experimental results show that the measurement accuracy of the natural frequency of the five-wire pendulum is $2.66 \times 10^{-5} \text{Hz}$, under the torsional vibration with an initial amplitude of $3 \times 10^{-4} \text{rad}$. This system can meet the needs of measuring mass center by five-wire pendulum.

Keywords: five-wire pendulum; natural frequency; diffraction grating; quadrant detector; electromagnetic drive

项目基金: 国家重点研发计划: 超高精度惯性传感器测试与评估技术 (2020YFC2200600)

作者简介: 张晟 (1998-), 男, 河南开封人, 硕士研究生, 主要从事惯性传感器相关设计方面的研究。

通讯作者: 王智 (1978-), 男, 山东寿光人, 研究员, 博士, 主要从事空间引力波探测领域的研究。

0 引言

空间引力波探测是基于激光外差干涉测量技术, 通过测量不同航天器中自由悬浮的测试质量 (Test mass, TM) 的距离变化^[1], 从而推断引力波的存在。TM 是一边长为 46mm 的金铂合金立方体, 为激光干涉仪提供测量基准。我国空间引力波探测“太极计划”要求在 0.1mHz 到 1Hz 频段, TM 的敏感轴向的残余加速度噪声低于 $3 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}/\text{Hz}^{1/2}$ ^[2]。由于 TM 在航天器外壳的保护之下运动, 其受到的外界扰动远远小于航天器, 为保证两者间相对位置不变, 需对 TM 或者航天器进行控制。

空间惯性传感器是空间引力波探测的关键载荷之一, 由 TM、电极笼、前端电子学系统以及辅助系统构成^[3]。电极笼是电极载体, 其内表面上包含多组对称布置的电容极板。前端电子学通过电容传感方式检测测试质量与电极笼的相对位置关系, 并能够对 TM 进行静电反馈控制, 使 TM 处于电极笼中心位置。但是电容位移传感检测的是 TM 的形心与电极笼中心的相对位置, 而静电力作用于 TM 的质心。TM 质心与形心不重合会使 TM 产生额外加速度噪声。在太极计划中, 目前对 TM 的质心偏移量要求为小于 $3.75 \mu\text{m}$ 。

质心测量方法主要分为两类, 一类是基于静力矩平衡原理的静态测量方法, 如悬挂法^[4]、多点支撑法、不平衡力矩法、吊起法、举升法和可倾斜平台法等。王梅宝^[5]利用三点支撑使物体测量精度达到 0.1mm。李楠^[6]等利用不平衡力矩法最高能达到轴向 0.05 mm 的测量精度。另一类是动态测量方法, 包括复摆法、转动惯量法、动平衡法等。转动惯量法包括扭摆法^[7]、多线摆法等, 其原理是通过测量扭摆的振动频率进而得到被

测物体的转动惯量, 再根据质心与转动惯量关系计算得到被测物体质心的位置坐标。

转动惯量法需要对摆的扭振固有频率进行测量, 邹红玉等^[8]利用光电门扫描法直接实现对扭摆的振动周期的测量。另外也可根据角位移测量^[9]结果拟合出固有频率, 郭继平^[10]等利用同步图像采集帧率为 60 帧/s 的 CMOS 相机实现物体的动态摆角测量, 测量误差可控制在 $\pm 0.02^\circ$ 。孙天龙等^[11]学者将视觉测量应用于物体转动惯量的测量中, 利用高帧率相机记录扭转振动的运动曲线, 从而得出扭振的周期和阻尼参数。但是该方法通常用于大幅度动态摆角的测量, 难以辨别摆角在角秒级别的变化。此外, 摆的单自由度扭转振动需要由外部激励引起, 当利用弹性元件的初始势能驱动扭摆运动时, 不能精确控制每次摆的初始振幅。王若琳^[12]等通过悬丝顶端固定的真空导引给摆施加外部激励, 振幅可控, 但其扭摆为单悬丝结构,

五线摆法属于转动惯量法, 该方法通过合理设计摆线几何结构抑制摆除扭转外其他自由度, 同时将被测物体固定在摆平台上远离旋转轴的位置, 利用平行轴定理, 放大了被测物体质心形心偏移对摆振动频率的贡献。TM 的质心与其形心间的偏差仅为微米量级, 对五线摆的扭转振动固有频率的测量提出高精度的要求。本文采用基于衍射光栅和四象限探测器^[13]的角位移测量方法, 对五线摆扭转振动过程中的微小角位移进行放大, 并提高了角位移测量的采样频率, 能够精确得到五线摆扭转振动的运动曲线, 利于固有频率的高精度拟合计算。同时, 因电磁驱动器具有高效, 稳定, 节能, 易于控制和进行结构参数的优化等特点^[14], 本文围绕电磁驱动对五线摆的振动激励装置进行了设

计。

1 五线摆质心测量系统

1.1 系统组成

质心测量系统主要包括五线摆平台、被测物体、配重、角位移测量子系统及电磁驱动子系统等，五线摆的结构如图 1 所示。摆平台与底座通过五根悬丝连接，悬丝与摆平台的三个连接点到摆的旋转中心的距离相等，其中一个连接点处连接一垂直悬丝，另外两个连接点处分别连接两根互相垂直的悬丝，该结构形式能够限制摆的摆动和平移自由度。电磁驱动装置由永磁体和两个通电线圈组成，为五线摆的转动提供激励。光栅与永磁体均固定在五线摆平台旋转中心下方的支架上。

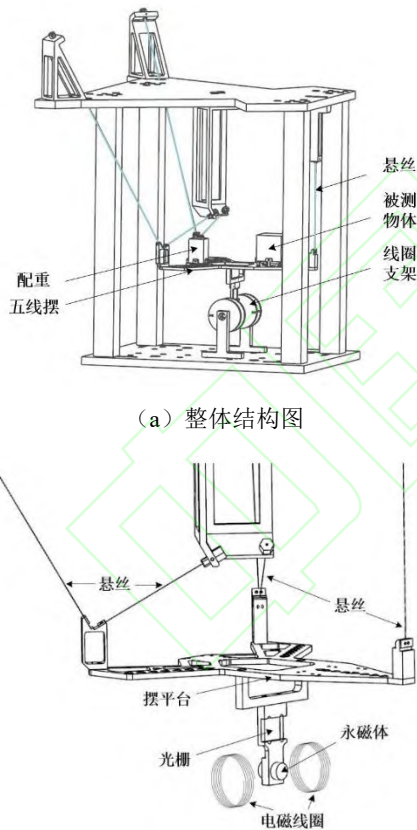


图 1 五线摆示意图

1.2 质心测量原理

图 2 为五线摆测量物体质心的原理图。摆平台悬挂在悬丝下端，被测物体通过夹具固定在摆平台上，摆在初始激励的作用下绕其中心转轴进行扭转振动。

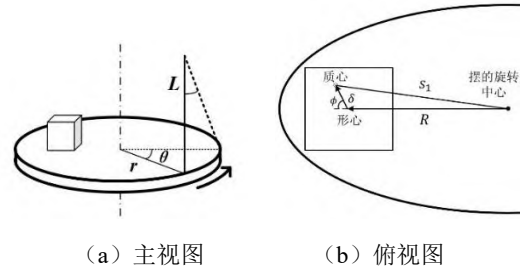


图 2 质心测量原理图

扭摆的转角非常小时，取 $\sin\theta \approx \theta$ ，由动量矩定理知，摆在自由振动时运动方程为：

$$(I_0 + I_1) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Gamma\theta = 0 \quad (1)$$

式中， Γ 是摆的扭转刚度系数， $\Gamma\theta$ 为恢复力矩， I_0 是摆空载时的转动惯量， I_1 是被测物体绕摆旋转中心的转动惯量。摆的扭转刚度系数与悬丝长度以及悬丝附着点到旋转中心的距离有关：

$$\Gamma = \frac{mgr^2}{L} \quad (2)$$

式中， m 是摆和被测物体的总质量， L 为悬丝等效长度， r 为悬丝附着点到旋转中心的距离。由式(1)得到摆的扭转振动固有频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{\Gamma}{I_0 + I_1}} \quad (3)$$

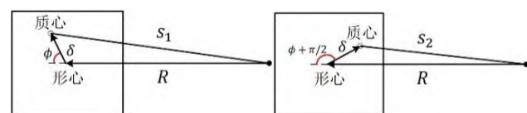
如图 2(b)所示，将被测物体固定在与摆的旋转中心距离为 R 的位置，被测物体的实际质心相对于摆旋转中心的距离为 s_1 ，结合平行轴定理，则式(3)可以表示为：

$$\omega = \sqrt{\frac{\Gamma}{I_0 + I_2 + m_1 s_1^2}} \quad (4)$$

式中， I_2 是被测物体绕自身质心的转动惯量， m_1 是被测物体的质量。被测物体的实际质心绕其形心的旋转角为 ϕ ，且被测物体的质心与形心距离为 δ ，则：

$$s_1^2 = R^2 + \delta^2 + 2R\delta \cos\phi \quad (5)$$

对被测物体进行质心测量时，将被测物体每次绕其形心旋转角度 $\pi/2$ ，如图 3 所示，根据式(5)得到另外三组值。



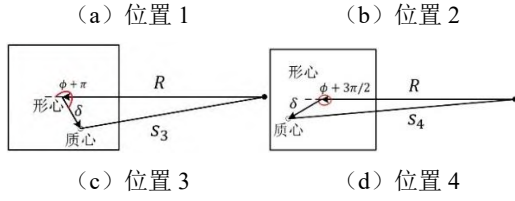


图3 物体绕其形心转动示意图

$$s_2^2 = R^2 + \delta^2 - 2R\delta \sin \phi \quad (6)$$

$$s_3^2 = R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \phi \quad (7)$$

$$s_4^2 = R^2 + \delta^2 + 2R\delta \sin \phi \quad (8)$$

联立式(4)(5)(6)(7)(8)可得:

$$s_1^2 - s_3^2 = 4R\delta \cos \phi = \frac{\Gamma}{m_1} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_3^2} \right) \quad (9)$$

$$s_4^2 - s_2^2 = 4R\delta \sin \phi = \frac{\Gamma}{m_1} \left(\frac{1}{\omega_4^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \quad (10)$$

因此,被测物体的质心偏移量 δ 可通过测量扭摆的多组固有频率 ω 计算得到。

1.3 扭转频率测量精度需求分析

根据式(4)和式(5),可得到摆的振动固有频率的函数表达式为:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Gamma}{I_0 + I_2 + m_1(R^2 + \delta^2 + 2R\delta \cos \phi)}} \quad (11)$$

在选取摆的扭转振动固有频率时,考虑到实验台的振动噪声源在水平方向和垂直方向上分别在 10 Hz 和 30 Hz 附近有一个峰值,应选取低于噪声源频段的频率作为摆的扭转振动的固有频率,以便进一步将摆的信号与振动噪声源进行频谱分离。同时结合式(2)和式(3)可知,摆的扭转振动的固有频率,是关于 L 和 r 的函数,若要降低摆的固有频率,就需要更长的悬丝,从而造成摆的尺寸过大。最终,将摆的固有频率设计在 2.4Hz 左右。

本课题测量了一个具有质心偏移的立方体铝块,其质量为 0.388kg。摆与被测物体的相关参数如表 1 所示。

表 1 五线摆相关参数

$I_0(\text{kg mm}^2)$	$m(\text{kg})$	$r(\text{mm})$	$R(\text{mm})$	$L(\text{mm})$
4873	1.049	160	75	180

求出函数 $\omega=f(\delta, \phi)$ 对 δ 的偏导函数 $\partial\omega/\partial\delta$, 将现有的设计好的扭摆和被测物体的实际参数代入后,其数值解如图 4 所示, $\partial\omega/\partial\delta$ 的值与 ϕ 的大小有关,且基本不随 δ 的变化而变化。

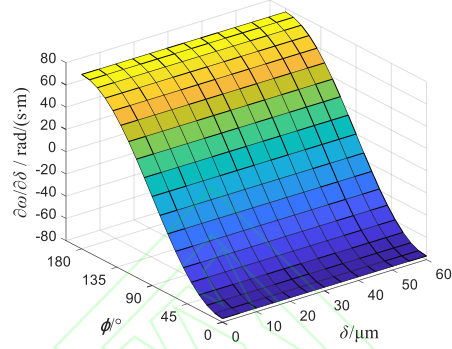


图4 偏导函数 $\partial\omega/\partial\delta$ 的数值解

对一确定的被测物体,将其固定在五线摆上,则 δ 与 ϕ 为定值。若此时被测物体的质心偏移量 δ 变化量为 $\Delta\delta$, 对应的固有频率差值 Δf 为:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\partial\omega}{\partial\delta} \frac{\Delta\delta}{2\pi} \quad (12)$$

当 $\phi=0^\circ$ 或 180° 时, $|\partial\omega/\partial\delta|$ 有最大值,此时式(12)对应结果如图 5 所示,若质心测量误差为 $2.5\mu\text{m}$, 即 $\Delta\delta$ 为 $2.5\mu\text{m}$, 对应的 Δf 的最大值为 3×10^{-5} Hz, 即五线摆的固有频率的测量精度至少要达到 3×10^{-5} Hz。

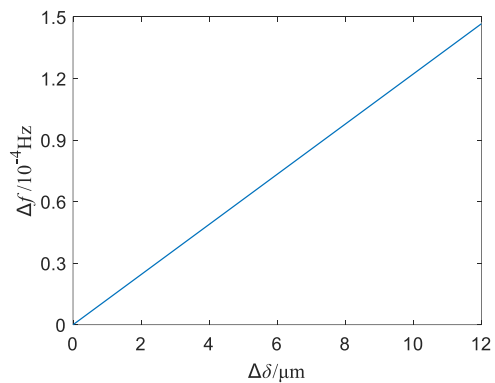


图5 扭摆固有频率测量精度需求

2 扭转频率测量方案设计

利用电磁驱动器给定五线摆一初始扭转角 θ_0 , 线圈断电后五线摆产生自由扭转振动, 根据摆的单自由度有阻尼自由振动的力

学分析可知,五线摆扭转角 θ 与时间 t 存在如下关系:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad (13)$$

式中, θ_0 为振荡的初始幅值, ζ 为阻尼系数, ω_n 为固有频率。然后角位移测量子系统得到扭摆的转角 $\theta(t)$,通过对一系列 θ 值进行非线性曲线拟合,最终确定扭摆响应的固有频率。

2.1 扭转振幅的确定

通过 $\sin\theta \approx \theta$ 将五线摆的扭转运动近似为简谐运动,从而得到式(1),并得到固有频率如式(3)所示。但是摆的真实扭转运动的微分方程是非线性的^[15-16],其解 ω_{nl} 可以表示为:

$$\omega_{nl} = \frac{\pi}{2K\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right)} \omega \quad (14)$$

式中, θ_0 为摆自由振动的初始振幅, K 是第一类完全椭圆积分。因此,五线摆振动的固有频率是其振幅的一个微小函数, $|\omega_{nl}-\omega|$ 可看作五线摆的系统误差。当 θ_0 取 3×10^{-4} rad, $\omega/2\pi$ 取2.4Hz时, $|\omega_{nl}-\omega|/2\pi$ 的值小于 10^{-6} Hz,可以将五线摆的扭转运动近似为简谐运动,且不会影响五线摆振动固有频率测量精度。因此,将五线摆扭转振动的最大振幅确定在 10^{-4} rad量级。

2.2 电磁驱动设计

在对五线摆角位移进行重复测量时,为了能够测得一致性较好的固有频率,设计电磁驱动装置对五线摆施加可重复性的激励,使摆的初始振幅保持一致。如图6所示,将两个电磁线圈关于永磁体对称布置。对固定安装的线圈通电后,永磁体受电磁力矩作用后带动整个平台转动。当五线摆扭转角为 θ_0 且处于平衡状态时,五线摆所受扭矩 M 与五线摆悬丝恢复力矩相等,即:

$$M = \Gamma \theta_0 \quad (15)$$

利用仿真软件进行电磁仿真,计算永磁体所受电磁力矩,模拟的物理场为稳态电磁学物理场。图6为电磁驱动器简化模型图,永磁体位于空气域的中心,是直径为 R_1 ,高

为 L_1 的圆柱体,线圈的内径为 R_2 ,宽度为 L_2 。电磁驱动器的工作气隙(两个线圈分别与永磁体之间的距离)为 h 。在软件中添加永磁体的材料为N35钕铁硼,线圈的材料为铜。将线圈匝数设置为80匝,两线圈输入同向电流,使两线圈在其中间区域产生的磁场的方向一致,且磁场强度相对均匀。然后对该模型进行仿真,根据多次的仿真结果,最终电磁驱动器各参数设置如表2所示。

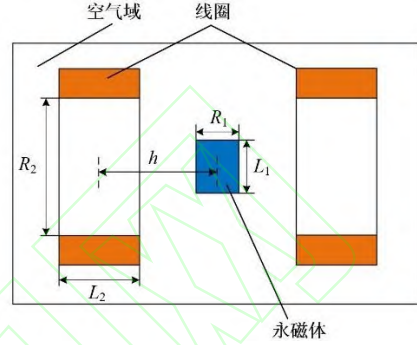


图6 电磁驱动器简化模型图

表2 电磁驱动参数

R_1	R_2	L_1	L_2	h
15	45	12	20	45

将通电线圈电流的大小 I 设置为变量,即后期实验中的可调参数。在1、1.1、1.2、1.3、1.4、1.5 A六种不同电流下的五线摆扭转角 θ_0 如图7所示。

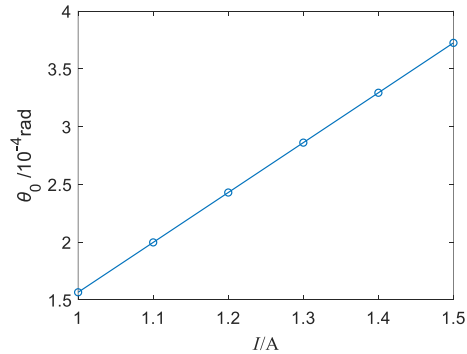


图7 五线摆扭转角与线圈电流关系图

直接由电源产生的信号功率比较小,无法达到设计要求的驱动能力,因此通过基于LM675T的功率放大电路对信号进行了放大,使其功率满足实验要求。电磁驱动器的硬件电路主要由直流稳压电源,功率放大电路以及线圈组成。

2.3 角位移测量设计

为准确记录五线摆平台的扭转振动曲线,所采用的非接触式角位移测量方法如图8所示,衍射光栅固定于五线摆平台的旋转中心处。使用激光作为光源,发出波长为 λ 的入射光束,光栅法线为 N 。利用位置传感器捕获反射光束,确定入射角 α 。四象限探测器用于捕获衍射光束。由衍射方程得:

$$d(\sin \alpha + \sin \beta_1) = \lambda \quad (16)$$

式中, d 为光栅常数, α 和 β_1 分别为入射角和1级衍射光的衍射角。对式(16)求导可知,如果光栅逆时针旋转 $\delta\alpha$ 角,则1级衍射光束的衍射角 β_1 的增量 $\delta\beta_1$ 为:

$$\delta\beta_1 = \frac{-\cos\alpha}{\cos\beta_1} \delta\alpha \quad (17)$$

设光栅顺时针转动微小角度 $\delta\alpha$,如图8(b)所示,则1级衍射光束相对四象限探测器的转角 $\Delta\beta$ 为:

$$\Delta\beta = \delta\alpha - \delta\beta_1 = \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta_1}\right) \delta\alpha \quad (18)$$

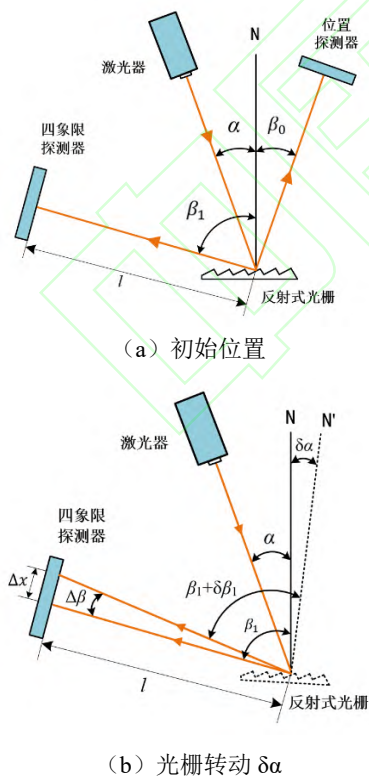


图8 角位移测量示意图

因此,当摆平台旋转时,衍射光束的角度增量由于衍射角而被放大。设四象限探测

器与衍射光栅的距离为 l ,此时光栅转角 $\delta\alpha$ 在四象限探测器上的对应位移 Δx 为:

$$\Delta x = l\Delta\beta = l \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta_1}\right) \delta\alpha \quad (19)$$

该测量方案能够通过衍射阶数角放大五线摆的角位移,提高测量灵敏度,且摆的任何微小平移运动都不会被放大。由于五线摆的最大振幅限制在 3×10^{-4} rad左右,取四象限探测器的测量范围为 ± 1.5 mm,放大倍数应该设计在5倍左右。该测量方案的具体参数设计如表3所示,代入式(19)得到 $\Delta x = 4.77\delta\alpha$ 。

表3 角位移测量装置参数

λ (nm)	d (mm)	α ($^\circ$)	β_1 ($^\circ$)	l (mm)
1064	1/1200	16.3	84.9	400

3 扭转频率测量实验与结果

3.1 实验平台

根据上述方案设计搭建基于五线摆的扭转振动固有频率测量平台,如图9所示。激光器采用红外固体激光器,型号为MIL-III-1064nm (PhotonTec Berlin),波长为1064nm,光束孔径为2mm。同时,针对从能量传输光纤中出来的激光,利用准直镜将其变为平行光。衍射光栅采用反射式闪耀光栅,尺寸为 $12.7\text{mm} \times 12.7\text{mm}$,厚度为6mm,刻线周期为1200线/mm。驱动器中的永磁体的为铁磁性材料钕铁硼,线圈的材料为铜,采用聚酯漆包线,用于缠绕线圈的骨架采用铝型材。为线圈提供电流的功率放大电路,其电源电压与输入电压由RIGOL的直流稳压电源DP832提供。

测量时,首先在两个线圈中加载方向、大小均相同的电流,将五线摆的初始振幅 θ_0 ,即光栅初始转角控制为 3×10^{-4} rad。接着,取消激励,五线摆做单自由度的小角度的谐波运动,此时光斑在四象限探测器上的位移曲线数据,通过USB数据线传输到上位机,从而形成五线摆的扭转振动曲线。最后对五线摆角位移数据进行非线性曲线拟合,确定出摆响应的参数,包括固有频率和阻尼系数等。由于工作台的振动噪声影响,摆的响应

不是一个干净的阻尼正弦曲线，为了不失真地恢复角位移信号，所使用的四象限探测器的采样频率为 10kHz。

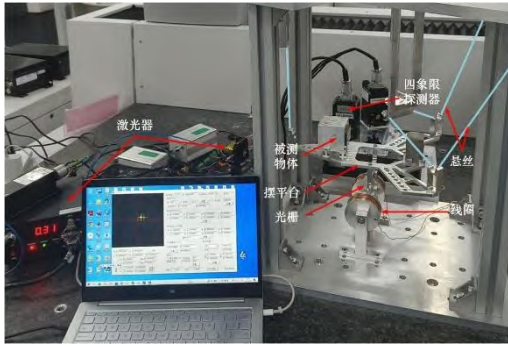
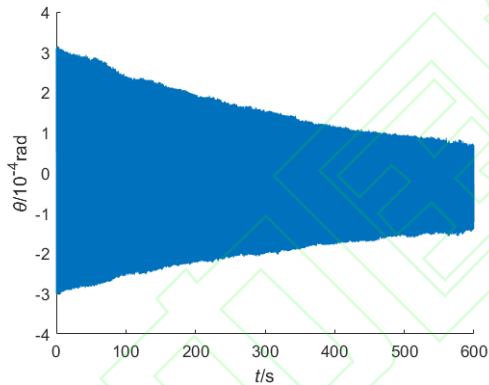


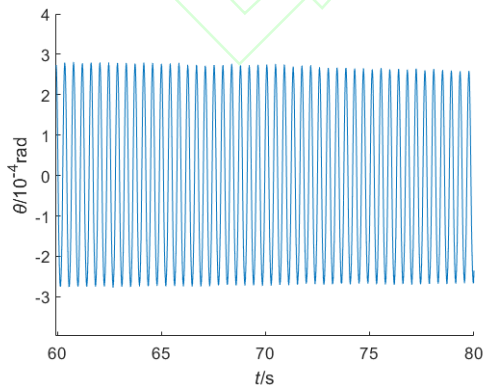
图 9 五线摆扭振固有频率测量系统

3.2 测量结果

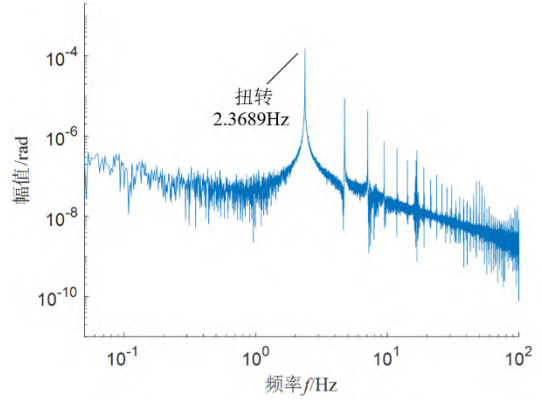
利用上述搭建的测量装置进行五线摆的扭振固有频率测量实验。根据式(13)，将四象限探测器数据经过处理后得到五线摆角位移随时间的变化曲线，并且经过傅里叶变换得到其幅频谱图，如图 10 所示。



(a) 时域图



(b) 局部放大图



(c) 傅里叶变换频谱图

图 10 角位移信号

由式(13)得到实际拟合所需要的理想函数模型为：

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + d \quad (20)$$

式中， d 为四象限探测器上光斑的初始位置相对中心点的偏值。对所采集角位移数据进行非线性曲线拟合，得到五线摆的固有频率 $f = \omega_n / 2\pi = 2.3689\text{Hz}$ 。

为了得到更准确的固有频率值，保持相同的实验条件，进行重复测量，图 11 为三十次固有频率测量结果。

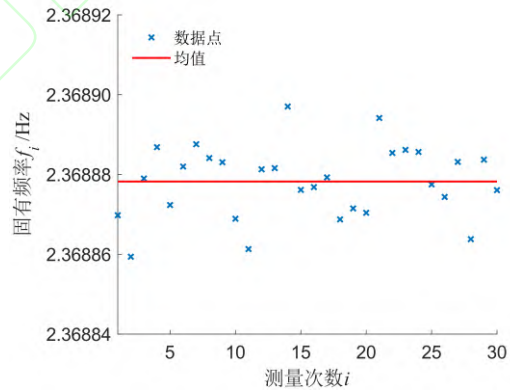


图 11 初始振幅为 0.3mrad 的重复性测量结果

三十次测量得到的固有频率波动幅度较小，其算数平均值 \bar{f} 为 2.368878Hz，根据方差计算公式：

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f})^2}{n-1} \quad (21)$$

式中， n 为重复性实验测量总次数，即 $n=30$ ，

得到标准差 s 为 8.86×10^{-6} Hz, 按正态分布取置信因子 $k=3$, 算术平均值的精度为 2.66×10^{-5} Hz。

4 结束语

本文提出了基于五线摆的物体质心测量的方法, 建立了被测物体质心变化量与其对应的五线摆固有频率差值的数学模型, 得到了五线摆固有频率测量精度的指标要求。然后设计了一种基于光栅衍射光束和四象限探测器的动态角位移测量方法, 通过光栅的衍射作用放大五线摆的振动角位移, 并利用 10kHz 采样率的四象限探测器获取角位移信号, 从而提高测量精度。同时设计了用于为五线摆提供稳定的可重复性激励的电磁驱动器。利用该测量系统对已有五线摆进行了扭转振动固有频率测量实验, 针对重复测量得到的多组固有频率数据进行精度分析, 得到固有频率的算术平均值为 2.368878Hz, 取置信因子 $k=3$, 算术平均值的精度为 2.66×10^{-5} Hz, 满足小于 3×10^{-5} Hz 的精度要求, 即利用五线摆测量物体质心相对其形心的位置时, 能够控制测量误差在 $2.5 \mu\text{m}$ 以内。今后, 可尝试采用更好的隔震措施, 同时减小实验环境的温度波动, 以达到更高的固有频率测量精度。

参考文献

- [1] 徐利,王晴岚.利用扭秤进行空间干涉仪的地面测试技术[J].中国测试,2020,46(2):74-79.
- [2] LUO Z R, WANG Y, WU Y L, et al. The Taiji program: A concise overview[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics,2020,2021(5): ptaa083.
- [3] 吴树范,王楠,龚德仁.引力波探测科学任务关键技术[J].深空探测学报,2020,7(2):118-127.
- [4] 李凯,周璟成.基于图像分析的质心和转动惯量测量方法[J].力学与实践,2021,43(5): 771-775.
- [5] 王梅宝,张晓琳,陈莉,等.多点称重法测量质心误差修正[J].计量学报,2022,43(8):1058-1063.
- [6] 李楠,骆旭,王丽,等.高精度质心测量系统设计与分析[J].计测技术,2021,41(4):44-48.
- [7] 张晓琳,冯晓媛,于航,等.基于HHT的转动惯量测量技术研究[J].仪器仪表学报,2022,43(6):38-45.
- [8] 邹红玉,郑红平.扭摆法测量转动惯量实验中光电门摆放位置的探究[J].物理实验,2009,29(6):29-31.
- [9] 吴常铖,杨德华,曹青青等.基于视觉和最大长度序列的旋转角度测量系统[J].中国测试,2022,48(1):122-128.
- [10] 郭继平,李阿蒙,于冀平,等.双目立体视觉动态角度测量方法[J].中国测试,2015,41(7): 21-23+36.
- [11] 汪睿,鲁承炜,孙天龙等.基于机器视觉的扭摆法转动惯量测量技术研究[J].电子测量技术,2022,45(3):136-145.
- [12] 王若琳,胡翔,余烨,等.基于扭摆的落体质心与光心距离的高精度测量[J].仪器仪表学报,2022,43(8): 85-92.
- [13] LI Q, WU J B, CHEN Y S, et al. A New Response Approximation Model of the Quadrant Detector Using the Optimized BP Neural Network [J].IEEE Sensors Journal, 2020,20(8):4345-4352.
- [14] 朱红秀,杜闯,褚彦斌,等.电磁驱动机器鱼实验平台的设计[J].机械设计与制造,2022,374(4):216-219.
- [15] 吴明珏,王顺宇,李俊,等.三线摆的运动方程、周期及角位置概率分布[J].大学物理,2021,40(4):64-67.
- [16] GIORGIO P. Large oscillations of the trifilar pendulum: Analytical and experimental study[J]. Mechanism and Machine Theory,2021,156:104157.