

# 惯性传感器表面电势测量平台误差分析

张瑞平<sup>1,2</sup>, 王智<sup>1</sup>, 王永宪<sup>1</sup>, 王洋<sup>3</sup>, 王乐<sup>3</sup>, 于涛<sup>1</sup>, 李华东<sup>1</sup>, 朱俊青<sup>1</sup>

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033; 2. 中国科学院大学, 北京 100049; 3. 吉林农业大学工程技术学院, 长春 130118)

**摘要:**为了研究高精度惯性传感器敏感结构中测试质量与电极笼间随时空变化的表面电势差即斑块场效应(patch effect)对惯性传感器精度的影响,需要搭建高精度 patch 效应测试平台,平台的静电控制扭秤系统力矩分辨率在 0.1 mHz 频点附近约为  $2.2 \times 10^{-14} \text{ Nm}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。为了达到此项指标,采用微分法建立扭秤测试平台误差函数模型,并在空间引力波探测惯性传感器 patch 效应测试平台的误差分析中首次采用遗传算法对误差项极值寻优及利用蒙特卡洛算法求误差项的数字特征。最后,根据误差分析结果搭建了高精度 patch 效应测试平台。实验结果表明,利用该平台测量 patch 效应得到的电势分辨率在 0.1 mHz 频点附近接近  $30 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ ,从而证明了所提误差分析方法得到的结果可以满足高精度惯性传感器 patch 效应测试平台的需求。

**关键词:**空间引力波;惯性传感器;patch 效应;误差分析

中图分类号:TH161+.2

文献标志码:A

文章编号:2095-2783(2023)08-0905-08

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Error analysis of test platform for patch effect of inertial sensor

ZHANG Ruiping<sup>1,2</sup>, WANG Zhi<sup>1</sup>, WANG Yongxian<sup>1</sup>, WANG Yang<sup>3</sup>, WANG Le<sup>3</sup>,  
YU Tao<sup>1</sup>, LI Huadong<sup>1</sup>, ZHU Junqing<sup>1</sup>

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;  
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. College of Engineering and Technology,  
Jilin Agricultural University, Changchun 130118, China)

**Abstract:** In order to study the influence of the potential difference between the surface of the test mass and the electrode cage in the sensitive structure of the high-precision inertial sensor over time and space, i. e., the influence of the patch effect on the accuracy of the inertial sensor, it is necessary to build a high-precision patch effect test platform. It is about  $2.2 \times 10^{-14} \text{ Nm}/\sqrt{\text{Hz}}$  around the 0.1 mHz frequency. In order to achieve this index, differential method is used to establish the error function model of the torsion balance test platform, and the genetic algorithm is used for the first time in the error analysis of patch effect test platform for space gravitational wave detection inertial sensor field to optimize the extreme value of the error term. Moreover, the Monte Carlo algorithm is employed to obtain the numerical characteristics of the error term. Finally, according to the error analysis results, a high-precision patch effect test platform is built. The experimental results show that the potential resolution obtained using this platform to measure the patch effect is close to  $30 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$  at the 0.1 mHz frequency point. It also proves that the results obtained by this error analysis method can meet the requirements of patch effect testing of high-precision inertial sensors.

**Keywords:** space gravitational waves; inertial sensor; patch effect; error analysis

惯性传感器是一种实时记录控制系统中执行装置位置、速度和加速度等信息的测量装置,可实现执行装置完整性判别,其数据的准确性对执行装置完整性判别的准确性和系统的鲁棒性会造成直接影响<sup>[1]</sup>。惯性传感器的发展已有百余年的历史,其广泛应用于导航、制导、控制、测量等领域。在空间引力波探测中,惯性传感器起到测量基准的作用<sup>[2]</sup>,其敏感结构由电极笼和测试质量组成。测试质量受到多种噪声的影响,为了完成空间引力波探测任务,测试质量在测量轴上的残余加速度噪声指标要求在

$[0.1 \text{ mHz}, 0.1 \text{ Hz}]$ 频段低于  $3 \times 10^{-15} \text{ m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})$ <sup>[3]</sup>,这对空间引力波探测中所用惯性传感器静电悬浮控制精度提出了极大的挑战。其中,patch 效应是影响惯性传感器静电悬浮控制精度的主要因素之一。

国际上测量 patch 效应主要有 2 种方式:一种是利用开尔文探针技术,由于测量精度的限制,在  $[0.1 \text{ mHz}, 0.1 \text{ Hz}]$ 频段附近,电势波动为毫伏量级,很难满足此项实验的精度要求<sup>[4]</sup>;另一种是利用高精度扭秤测试平台来测量 patch 效应。Pollack 等<sup>[5]</sup>针对 LISA 计划开发了惯性传感器 patch 效应

收稿日期:2022-07-30

基金项目:中国科学院对外合作重点项目(181722KYSB20190040)

第一作者:张瑞平(1996—),男,硕士研究生,主要研究方向为惯性传感器 patch 效应测试

通信作者:王智,研究员,主要研究方向为空间引力波探测惯性传感器,wz070611@126.com

测试平台,在 0.1 mHz 频点附近,测试质量表面电势波动为  $30 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ ,最终实验结果表明,该测试平台可以满足 LISA 计划的指标需求,但是并未对高精度扭秤测试平台进行误差分析。尹航<sup>[6]</sup>和史继芬<sup>[7]</sup>针对 patch 效应测试开发了高精度扭秤平台,虽然他们都对测试平台进行了误差分析,但是分析并不全面,电容传感电极在装调和加工中存在 6 个自由度方向上的误差,但是文中只列出了 5 种情况的误差分析,其他情况下误差项舍去的原因并未说明,并且实验结果表明,他们的测试系统电势分辨率在 0.1 mHz 频点附近已经达到了  $500 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。本文主要针对目前国内外关于高精度扭秤测试平台误差分析研究的不足,建立此系统的误差函数模型,并利用遗传算法与蒙特卡罗算法相结合的方法进行误差分配,最终按照误差分配的结果进行加工及调试。

为了深入研究利用高精度扭秤测试平台测量 patch 效应,首先建立扭秤测试平台的数学模型和物理模型;其次,建立误差函数模型,并通过总体指标与各个误差项之间的关系,对其中影响总体指标较小的误差项进行排除;然后,根据误差函数模型分析影响 patch 效应测试的误差源,包括惯性构件加工误差、装调误差及电压扰动引入的误差;之后,采用遗传算法对关键误差项进行极值寻优,并利用蒙特卡罗算法求解影响总体指标较大的误差项的数字特征;最后,通过搭建高精度扭秤平台证明此误差分析过程的正确性和科学性。

### 1 惯性传感器 patch 效应指标分析

空间引力波探测中用到的关键载荷惯性传感器敏感结构如图 1 和图 2 所示。

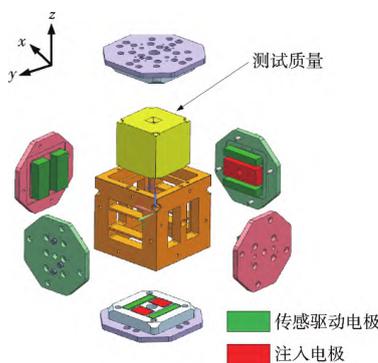


图 1 惯性传感器敏感结构  
Fig. 1 Sensitive structure of the inertial sensor

按照空间引力波探测理论分析给出的误差分配,要求在 0.1 mHz 频点附近,测试质量与电极笼间随时空变化的表面电势差即 patch 效应 ( $\delta V_{\text{im}}$ ) 产生的残余加速度噪声 ( $a_{\text{im}}$ ) 低于  $8.46 \times 10^{-16} \text{m}/(\text{s}^2 \cdot \sqrt{\text{Hz}})$ ,即

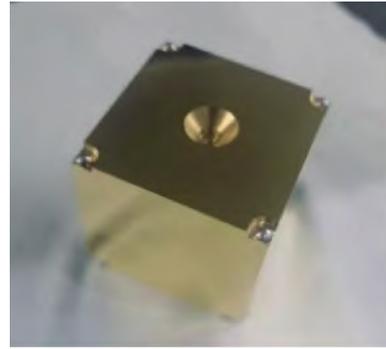


图 2 测试质量  
Fig. 2 Mass test

$$\delta V_{\text{im}} = \frac{a_{\text{im}} \cdot M \cdot d_{x_0}^2}{\sqrt{2}\epsilon_0 \cdot \delta V \cdot A} \quad (1)$$

式中:  $M$  为惯性传感器敏感结构测试质量的质量,  $M=1.97 \text{kg}$ ; 测试质量为正方体结构,  $A$  为其中 1 个面的面积,  $A=2.12 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ; 惯性传感器的闭环控制系统对测试质量的位姿进行测量及控制<sup>[8]</sup>, 使测试质量位于电极笼的中心位置,  $d_{x_0}$  为测试质量与  $x$  轴方向上电极的距离,  $d_{x_0} = 4 \times 10^{-3} \text{m}$ ;  $\delta V$  为直流杂散电势,  $\delta V = 1 \times 10^{-2} \text{V}$ ;  $\epsilon_0$  为真空介电常数,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

将上述参数代入式(1), 可得  $\delta V_{\text{im}} = 100 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。由于上述代入的参数全部是名义值, 而在实际加工、装调及测试中存在误差; 同时, 因为惯性传感器前端电子学的传感电路与驱动电路的电压扰动的影响, 所以评估 patch 效应在带宽内引起的电势波动的指标  $\delta V_{\text{im}}$  应小于  $50 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。

### 2 扭秤测试平台模型的建立

#### 2.1 扭秤数学模型的建立

传统扭秤由悬丝(钨丝、石英丝等)悬挂 1 个惯性构件组成, 通过角度传感器探测惯性构件的角度摆动及运动周期, 用于响应弱力信号, 扭秤模型如图 3 所示。故扭秤系统沿自由度 ( $\theta$ ) 转动的动力学方程为

$$I\ddot{\theta}(t) + \gamma\dot{\theta}(t) + \Gamma\theta(t) = \tau(t) \quad (2)$$

式中:  $I$  为惯性构件的转动惯量;  $\gamma$  为阻尼系数;  $\Gamma$  为悬丝的扭转刚度;  $\tau(t)$  为所有可能的扭转力矩, 传统

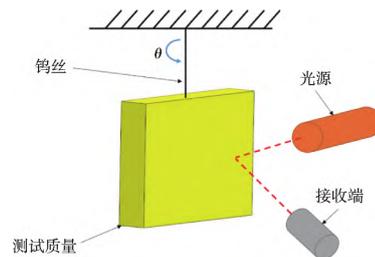


图 3 扭秤模型  
Fig. 3 Torsion balance model

扭秤在不施加力矩时,  $\tau(t) = \tau_{th,n}(t)$ ,  $\tau_{th,n}(t)$  为悬丝热噪声力矩。

对式(2)进行拉普拉斯变换,得

$$Is^2\theta(s) + \gamma s\theta(s) + \Gamma\theta(s) = \tau(s) \quad (3)$$

令  $s = j\omega$ , 可得

$$-I\omega^2\theta(\omega) + \Gamma(1 + j\delta)\theta(\omega) = \tau(\omega) \quad (4)$$

式中,  $\delta = \frac{\omega\gamma}{\Gamma}$  为系统的耗散角。

耗散因数与品质因数的关系被定义为  $\tan \delta = \frac{1}{Q}$ , 当耗散角( $\delta$ )趋向于 0(高品质因子)时,  $\delta = \frac{1}{Q}$ , 扭秤系统的品质因数  $Q \approx 3\ 000$ , 系统的固有角频率为  $\omega_0^2 = \frac{\Gamma}{I}$ , 扭秤系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{\Gamma \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j}{Q} \right]} \quad (5)$$

### 2.2 测量流程

扭秤测试平台工作原理如图 4 所示, 假设当左侧镀金铜板被施加直流参考电压时, 右侧铜板接地, 并且两镀金铜板中间是分开的。此时, 测量的是左侧镀金铜板正对的镀金硅片(测试质量)部分表面的平均电势, 镀金硅片此部分表面的面积与图 2 中测试质量 1 个面的面积相等且两者的表面特性相同。当施加的参考电压使得镀金硅片绕悬丝发生转动时, 与镀金铜板相对一侧的 2 个反馈电极施加反馈电压驱动测试质量, 大反馈电极负责粗调, 小反馈电极负责精调, 另一侧 2 个反馈电极悬空。反馈电极与系统闭环反馈回路相连接, 闭环反馈回路由控制器与自准直仪组成。最终能够测量 patch 效应是使得镀金硅片平行于镀金铜板<sup>[9]</sup>, 自准直仪用来读取镀金硅片角度变化信息。

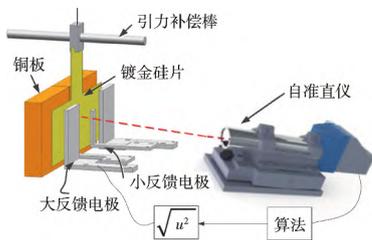


图 4 扭秤测试平台工作原理

Fig. 4 Working principle of torsion balance test platform

### 2.3 扭秤物理模型的建立

根据理论分析设计扭秤系统, 如图 5 所示, 此系统惯性构件部分的俯视图如图 6 所示。

由于扭秤的惯性构件是对称结构, 所以关键尺寸只说明一侧即可, 另一侧参数相同。二阶阻尼系统由钨丝、引力补偿棒、夹具及镀金硅片组成, 惯性构件参数见表 1。

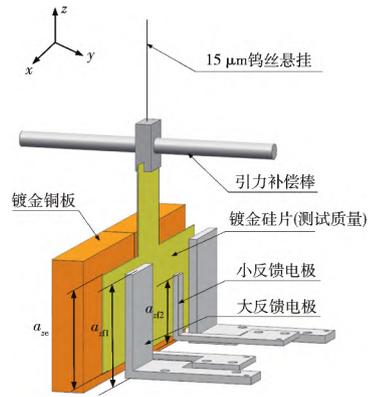


图 5 扭秤系统

Fig. 5 Torsion balance system

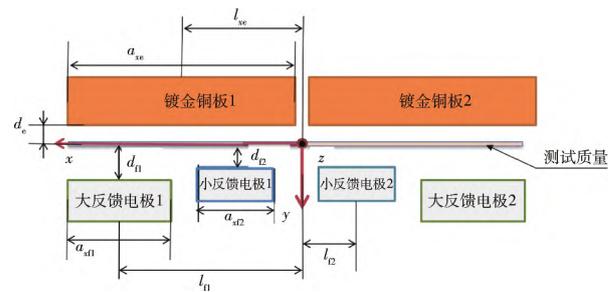


图 6 扭秤系统惯性构件俯视图

Fig. 6 Schematic diagram of the top view of the inertial component of the torsion balance system

表 1 惯性构件参数

Table 1 Inertial component parameter description

参数	数值
$a_{ze}$ /mm	57.2
$a_{xe}$ /mm	38.1
$d_e$ /mm	[0, 10]
$l_{xe}$ /mm	28.6
$a_{z11}$ /mm	40
$a_{x11}$ /mm	25
$d_{11}$ /mm	[0, 7]
$l_{11}$ /mm	40
$a_{z12}$ /mm	25
$a_{x12}$ /mm	6
$d_{12}$ /mm	[0, 4]
$l_{12}$ /mm	18
$I$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	$1.35 \times 10^{-5}$
$\gamma$ /( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ )	$3.3467 \times 10^{-11}$
$\Gamma$ /( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ )	$7.57 \times 10^{-10}$

采用型号为 ELCOMAT 3000 的自准直仪, 其分辨率为 0.005", 精度为 0.1", 测量范围为  $\pm 20''$ 。根据扭秤工作温度(室温  $T = 19.85\text{ }^\circ\text{C}$ ), 悬丝的机械热噪声可表示为

$$S_{th,n}(f) = 4k_B T \frac{\Gamma}{2\pi f Q} \quad (6)$$

式中:  $f$  为系统频率,  $f \in [0.1\text{ mHz}, 0.1\text{ Hz}]$ ;  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$ 。

自准直仪读出的噪声为

$$S_{\text{read}}(f) = \frac{S_{\theta}(f)}{|H(f)|^2} \quad (7)$$

式中： $S_{\theta}(f)$  为自准直仪测量的角度本底噪声，在理论分析时取值为  $(0.25 \times 10^{-6})^2 \times (1 + 0.0001/f)$ ；由于式(5)  $H(\omega)$  中的  $\omega = 2\pi f$ ，所以  $H(\omega)$  可以表示为  $H(f)$ 。

最终可以得到扭秤系统力矩分辨率为

$$S_{\text{Resolution}}(f) = S_{\text{th,n}}(f) + S_{\text{read}}(f) \quad (8)$$

将参数代入式(8)，可以得到在频率  $f \in [0.1 \text{ mHz}, 0.1 \text{ Hz}]$  时的扭秤力矩分辨率功率谱，如图 7 所示。图中扭秤系统的力矩分辨率在 0.1 mHz 频点附近为  $10^{-15} \text{ Nm}/\sqrt{\text{Hz}}$  量级。

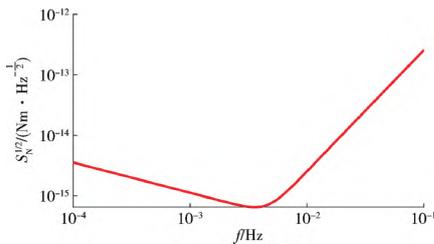


图 7 扭秤系统力矩分辨率理论曲线  
Fig. 7 Theoretical curve of torsion balance system torque resolution

按照 1.2 节所述测量流程，取扭秤惯性构件作为研究对象，假设在理想情况下，即无误差存在的情况下，在镀金硅片的中心建立右手坐标系，如图 6 所示。在图 6 中给左侧镀金铜板施加电压时，设所加直流电压为  $V_e$ ，那么此时镀金硅片由于感应电势的存在，将产生电势  $V_{\text{tm}}$ 。当平行的镀金硅片在静电力作用下发生绕  $z$  轴偏转角度  $\theta$  时，镀金硅片模型如图 8 所示。

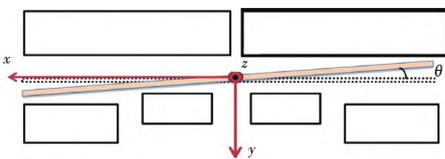


图 8 偏转角为  $\theta$  的镀金硅片模型  
Fig. 8 Gold-coated silicon wafer model with a deflection angle  $\theta$

扭矩 ( $\tau_e(t)$ ) 和电势能 ( $W_e$ ) 的关系为

$$\tau_e(t) = \frac{\partial W_e}{\partial \theta} \quad (9)$$

左侧铜板与镀金硅片间的电容值为

$$C_e = \int_{l_{xe} - \frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe} + \frac{1}{2}a_{xe}} \frac{\epsilon a_{ze}}{d_e + x\theta} dx \quad (10)$$

可得

$$\tau_e(t) = \frac{1}{2} \int_{l_{xe} - \frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe} + \frac{1}{2}a_{xe}} \frac{-\epsilon a_{ze} x}{(d_e + x\theta)^2} dx \cdot (V_e - V_{\text{tm}})^2 \quad (11)$$

其中，令

$$f(\theta) = \frac{-\epsilon a_{ze} x}{(d_e + x\theta)^2} \quad (12)$$

由于测试质量在理想状态下做小角度转动，故可以将  $f(\theta)$  函数在  $\theta = 0$  时应用泰勒公式展开：

$$\tau_e(t) = \frac{1}{2} \int_{l_{xe} - \frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe} + \frac{1}{2}a_{xe}} \left( \frac{-\epsilon a_{ze} x}{d_e^2} + \frac{2\epsilon a_{ze} x^2 \theta}{d_e^3} - \frac{2\epsilon a_{ze} x^3 \theta^2}{d_e^4} \right) dx \cdot (V_e - V_{\text{tm}})^2 \quad (13)$$

计算式(13)可得

$$\tau_e(t) = \frac{-\epsilon a_{ze} a_{xe} l_{xe}}{2d_e^2} \cdot (V_e - V_{\text{tm}})^2 + \frac{-\epsilon a_{ze} (a_{xe}^3 + 12a_{xe} l_{xe}^2)}{2d_e^2} \cdot (V_e - V_{\text{tm}})^2 \cdot \theta \quad (14)$$

当镀金铜板与镀金硅片平行时，镀金硅片的偏转角  $\theta = 0^\circ$ ，此时对式(14)中的  $V_{\text{tm}}$  求微分，可得

$$\delta \tau_e = \frac{\epsilon a_{xe} a_{ze} l_{xe}}{d_e^2} |V_e - V_{\text{tm}}| \delta V_{\text{tm}} \quad (15)$$

在式(15)中，要满足测试质量表面电势分辨率  $\delta V_{\text{tm}} = 50 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，根据 PI 的微位移平台控制铜板移动时最小步长取  $d_{\delta} = 500 \mu\text{m}$ ， $|V_e - V_{\text{tm}}| = 0.2 \text{ V}$ ，代入数据可得静电控制扭秤系统的力矩分辨率为  $\delta \tau_e = 2.2 \times 10^{-14} \text{ Nm}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。由图 7 可得，系统可以满足静电控制下的最小力矩分辨率，同理可得，扭秤系统也满足测试质量表面电势分辨率。

### 3 扭秤平台误差分析

#### 3.1 误差函数模型的建立

以台面为基准的惯性构件简图如图 9 所示，由于系统是对称结构，故只取镀金硅片、一侧镀金铜板、与镀金铜板同侧的大反馈电极及小反馈电极为研究对象。镀金硅片在安装时铅锤向下，它与镀金铜板及 2 块反馈极板的正对加工尺寸误差项为  $\delta a_{ze}, \delta a_{xe}, \delta a_{zf1}, \delta a_{xf1}, \delta a_{zf2}, \delta a_{xf2}$ ；安装过程中镀金硅片与镀金铜板、大反馈电极及小反馈电极间的距离的误差项为  $\delta d_e, \delta l_e, \delta d_{f1}, \delta l_{f1}, \delta d_{f2}, \delta l_{f2}$ ；调试过程中镀金硅片产生的误差项为镀金硅片绕  $z$  轴的转动 ( $\delta \theta$ ) 及沿  $y$  轴方向摆动的误差项 ( $\delta y$ )；各个极板输入电压波动引入的误差项分别为  $\delta V_e, \delta V_{f1}, \delta V_{f2}$ 。接下来，推导 2 自由度运动的镀金硅片的误差函数模型<sup>[10]</sup>。

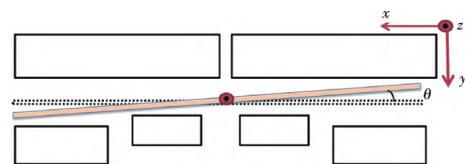


图 9 以台面为基准的惯性构件简图  
Fig. 9 Schematic diagram of inertial components based on the table

由式(10)可得

$$C'_e(y, \theta) = \int_{l_{xe}-\frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe}+\frac{1}{2}a_{xe}} \frac{\epsilon a_{ze}}{d_e + y + x\theta} dx. \quad (16)$$

对式(16)关于  $\theta$  求导,可得

$$\frac{\partial C'_e(y, \theta)}{\partial \theta} = \int_{l_{xe}-\frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe}+\frac{1}{2}a_{xe}} \frac{-\epsilon a_{ze} x}{(d_e + y + x\theta)^2} dx. \quad (17)$$

同理,由式(11)可得

$$\tau_e(t) = \frac{1}{2} \int_{l_{xe}-\frac{1}{2}a_{xe}}^{l_{xe}+\frac{1}{2}a_{xe}} \frac{-\epsilon a_{ze} x}{(d_e + y + x\theta)^2} dx \cdot (V_e - V_{tm})^2. \quad (18)$$

取  $f(y, \theta) = \frac{-\epsilon a_{ze} x}{(d_e + y + x\theta)^2}$ , 并在  $y = 0, \theta = 0$

处二元函数泰勒公式展开,略去非线性项,可得

$$\begin{aligned} \tau_e(t) = & -\frac{1}{2} \frac{\epsilon l_{xe} a_{ze} a_{xe}}{d_e^2} (V_e - V_{tm})^2 + \frac{\epsilon l_{xe} a_{ze} a_{xe} y}{d_e^3} \\ & (V_e - V_{tm})^2 + \frac{12\epsilon l_{xe}^2 a_{ze} a_{xe} + a_{xe}^3}{12d_e^3} \theta (V_e - V_{tm})^2. \end{aligned} \quad (19)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \tau_{f1}(t) = & -\frac{1}{2} \frac{\epsilon l_{f1} a_{zf1} a_{xf1}}{d_{f1}^2} (V_{f1} - V_{tm})^2 + \frac{\epsilon l_{f1} a_{zf1} a_{xf1} y}{d_{f1}^3} \cdot \\ & (V_{f1} - V_{tm})^2 + \frac{12\epsilon l_{f1}^2 a_{zf1} a_{xf1} + a_{xf1}^3}{12d_{f1}^3} \theta (V_{f1} - V_{tm})^2. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{f2}(t) = & -\frac{1}{2} \frac{\epsilon l_{f2} a_{zf2} a_{xf2}}{d_{f2}^2} (V_{f2} - V_{tm})^2 + \frac{\epsilon l_{f2} a_{zf2} a_{xf2} y}{d_{f2}^3} \cdot \\ & (V_{f2} - V_{tm})^2 + \frac{12\epsilon l_{f2}^2 a_{zf2} a_{xf2} + a_{xf2}^3}{12d_{f2}^3} \theta \cdot (V_{f2} - V_{tm})^2. \end{aligned} \quad (21)$$

当扭秤装调完毕,静置在真空罐中长时间后,由扭秤传递函数(式(5))的低频特性可知,力矩与扭转角度近似满足  $\tau = I\theta$ , 将式(19)~式(21)代入,得

$$\tau_e(t) - \tau_{f1}(t) - \tau_{f2}(t) = I\theta. \quad (22)$$

理想结构从动件位置可表述为<sup>[11]</sup>

$$\theta = \theta(V, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n). \quad (23)$$

式中:  $p_i$  为结构参数;  $V$  为结构的输入运动参数;  $\theta$  为结构的输出运动参数。

构建函数  $g(t)$ :

$$g(t) = \tau_e(t) - \tau_{f1}(t) - \tau_{f2}(t) - I\theta. \quad (24)$$

且  $g(t)$  的单位为 Nm, 那么由式(24)可得

$$\begin{aligned} g(V_1, V_2, V_3, V_4; \theta, y; p_1, p_2, \dots, p_{18}) = \\ g(V_e, V_{f1}, V_{f2}, V_{tm}; \theta, y; a_{ye}, a_{xe}, l_e, d_e, \\ a_{yf1}, a_{xf1}, l_{f1}, d_{f1}, a_{yf2}, a_{xf2}, l_{f2}, d_{f2}). \end{aligned} \quad (25)$$

设误差项全部为随机误差,那么对函数  $g(t)$  全微分可得

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial V_e} \delta V_e + \frac{\partial g}{\partial V_{f1}} \delta V_{f1} + \dots + \frac{\partial g}{\partial d_{f2}} \delta d_{f2}. \quad (26)$$

式中,  $\frac{\partial g}{\partial V_e}, \frac{\partial g}{\partial V_{f1}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial d_{f2}}$  为误差传递系数,在频域

内  $\delta g$  的单位为 Nm/√Hz, 且  $\delta V_e, \delta V_{f1}, \dots, \delta d_{f2}$  为各个误差项的极限误差。

电压波动引入的噪声包括电压源表施加在铜板上的电压波动( $\delta V_e$ )及电路板上 DA 端口输出到反馈电极的电压波动( $\delta V_{f1}$  和  $\delta V_{f2}$ )。

### 3.2 遗传算法对误差值的优化

首先使用等作用原则对误差进行分配,然后分析误差分配的合理性;如若不合理,将采用遗传算法对误差项进行优化,此算法最早由美国密歇根大学教授 Holland<sup>[12]</sup> 于 1975 年提出,是一类模拟物种进化的全局优化搜索算法,与传统算法相比,它不受限制条件的约束,具有良好的通用性,对搜索空间没有特殊要求,具有智能式搜索、全局优化等特点。遗传算法的研究对象包括各种非线性、多变量、多目标、复杂性的系统,一般的已知的优化算法(如爬山法、退火等)根本不可用,或者可用但是有效性较差,相比较而言,遗传算法不但可以保证可用,而且很有效<sup>[13-15]</sup>。在此项研究中将根据加工制造精度、装调精度及光学系统读出精度等进行多目标优化各个关键误差项的极限误差。

式(26)中由于  $\delta g = 0$ , 根据随机误差计算公式可得

$$\begin{aligned} \delta V_{tm} = & \frac{1}{\left| \frac{\partial g}{\partial V_{tm}} \right|} \cdot \\ & \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial V_e} \right)^2 \delta V_e^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial V_{f1}} \right)^2 \delta V_{f1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial d_{f2}} \right)^2 \delta d_{f2}^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

将初始名义值代入式(27)各个误差传递系数中。设各项极限误差为  $\delta_i$ , 各误差项为  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 17$ ), 等作用原则分配误差可表示为

$$\delta_i = \frac{\delta V_{tm}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial V_{tm}} \right)}{\left( \frac{\partial g}{\partial e_i} \right)}. \quad (28)$$

通过计算发现有几项分配不合理,如  $\delta V_{f1} \approx 28$  V,  $\delta a_{xf1} \approx 16$  m 等,因此此法不予考虑。接下来考虑实际情况,目前按照尺寸加工精度等级划分,尺寸加工精度采用高精密加工技术,加工精度可达  $(0.1 \sim 3) \mu\text{m}$ , 故加工误差可设范围为  $[10^{-6}, 10^{-5}]$  m; 对于装配误差,测量精度可达  $\mu\text{m}$  量级,故可设范围为  $[10^{-6}, 10^{-5}]$  m; 对于角度的测量,根据自准直仪的测量范围,可设范围为  $[0, 10]$  arcsec; 电压源表的精度可以达到  $\mu\text{V}$  量级,取其范围为  $[10^{-6}, 10^{-5}]$  V。按照微小误差取舍准则,通过上述范围可以剔除掉一些对系统影响较小的误差源,共剔除掉 11 项,分别为  $\delta a_{ze}, \delta l_{xe}, \delta y, \delta l_{f1}, \delta l_{f2}, \delta d_{f2}, \delta a_{zf1}, \delta a_{xf1}, \delta a_{zf2}, \delta a_{xf2}, \delta V_{f2}$ , 剩余 6 项误差源,分别为  $\delta a_{re}, \delta d_e, \delta \theta, \delta V_e, \delta V_{f1}, \delta d_{f1}$ 。接下来将剩余的 6 项误差作为在上述规定区间的目标函数,权重因子就是误差传递系数

中所对应的值,由式(27)可知,目标函数此消彼长,即提高某一目标函数需要以降低另一个目标函数为代价,该过程通过 MATLAB 软件中的 gamultiobj() 函数进行优化。在优化过程中发现误差项  $\delta a_{.re}$  优化的极限误差值量级为  $10^{-7}m$ ,而此精度加工很难达到,并且测量也极难,分析原因发现,可能与误差

函数中此误差项前面的误差传递系数  $\frac{\partial g}{\partial a_{.re}}$  有关,于是进行灵敏度分析并采用控制变量法来完成该分析过程。 $d_e$ 、 $d_{f1}$  和  $d_{f2}$  的变化范围见表 1。分析式(26)中各个误差传递系数与 3 个变化的距离( $d_e$ 、 $d_{f1}$  与  $d_{f2}$ )的函数关系,结果如图 10 所示。

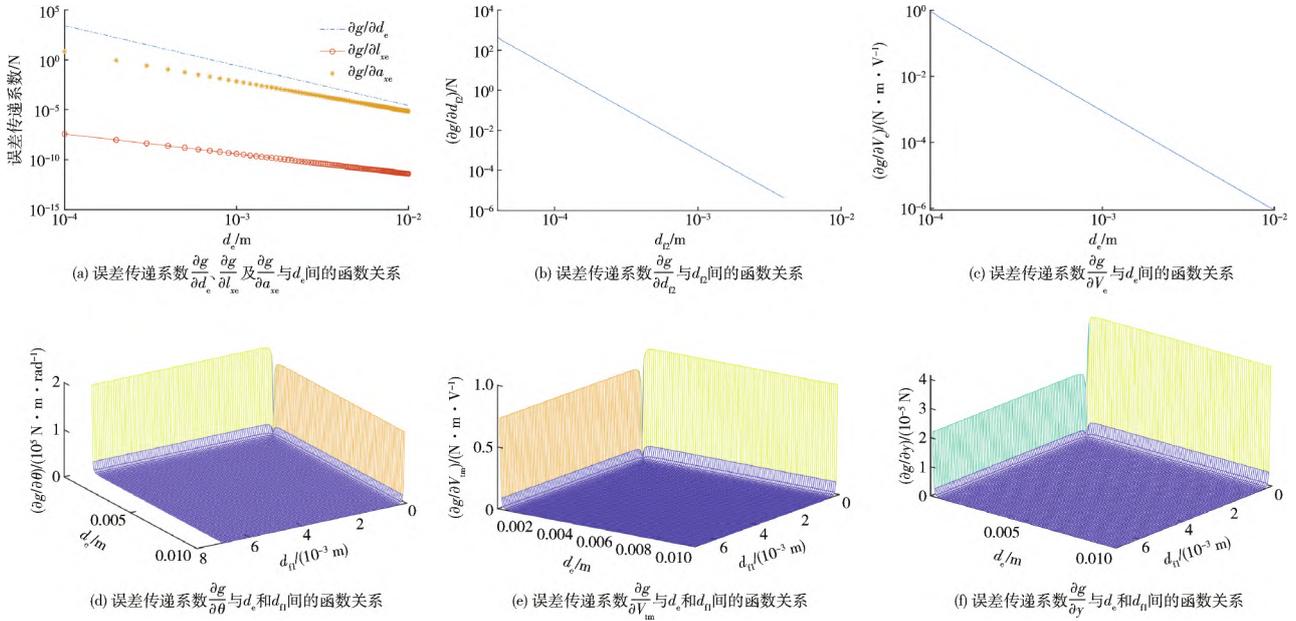


图 10 误差传递系数与极板间距离的关系

Fig. 10 Relationship between the error transfer coefficient and the plates distance

由图 10 可知:随着距离的减小,灵敏度系数逐渐增大;而灵敏度系数越大,系统电势分辨率越差。分析可得  $d_{f2} = 4\text{ mm}$ 。系统电势分辨率与极板间距离的关系如图 11 所示。

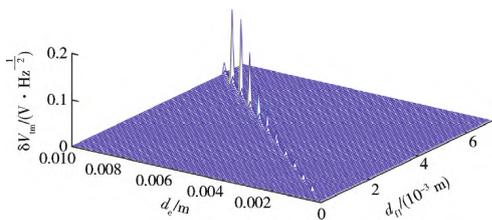


图 11 系统电势分辨率与极板间距离的关系  
Fig. 11 Relationship between the error term and the plates distance

当镀金硅片与铜板平行时,可以通过式(22)及扭秤的低频特性得到施加到各个极板上的平衡电势,如图 12 所示。

由图 11 和图 12 可知,当  $V_{f1} \approx 0.20095\text{ V}$ 、 $V_{f2} \approx 0.19996\text{ V}$ 、 $V_e \approx 0.20111\text{ V}$ 、 $d_{f1} = 0.0054\text{ m}$ 、 $d_e = 0.00919\text{ m}$  时,系统电势分辨率达到最高水平。再次采用遗传算法进行优化,优化过程如下:

1) 根据误差模型建立适应度函数,将灵敏度分析得到的名义值及表 1 中原有名义值代入适应度函

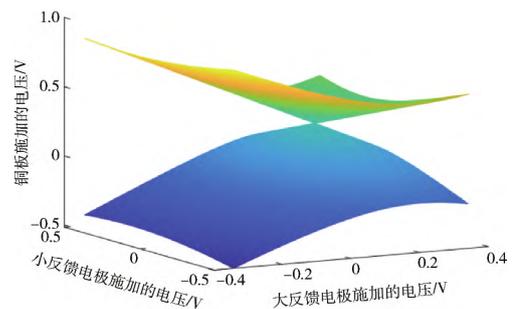


图 12 力矩平衡时各个极板的平衡电势  
Fig. 12 Equilibrium potential of each plate when the torque balanced

数(式(27))中;

2) 由上述提到的各个误差项范围设定 3 种约束形式,即上限及下限约束、线性不等式约束、线性等式约束;

3) 设置求解器,为了满足此分析过程,将最优个体系数设置为 0.3,种群大小设置为 200,最大进化代数设置为 300,停止代数设置为 200,适应度函数偏差设置为  $1 \times 10^{-10}$ 。

误差优化结果见表 2,电势分辨率结果为  $\delta V_m = \frac{22.07330\ \mu\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} < \frac{50\ \mu\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ 。

表 2 误差优化结果

Table 2 Optimized error results

误差项	极限误差值
$\delta a_{xc}/m$	$\pm 1.601\ 59 \times 10^{-5}$
$\delta d_c/m$	$\pm 4.633\ 28 \times 10^{-6}$
$\delta \theta/\text{rad}$	$\pm 4.540\ 68 \times 10^{-6}$
$\delta d_{\Omega}/m$	$\pm 4.277\ 18 \times 10^{-6}$
$\delta V_e/V$	$\pm 2.002\ 35 \times 10^{-6}$
$\delta V_{\Omega}/V$	$\pm 1.254\ 70 \times 10^{-6}$

### 4 惯性构件的数字特征

对上述已经分配完且影响系统精度的误差项通

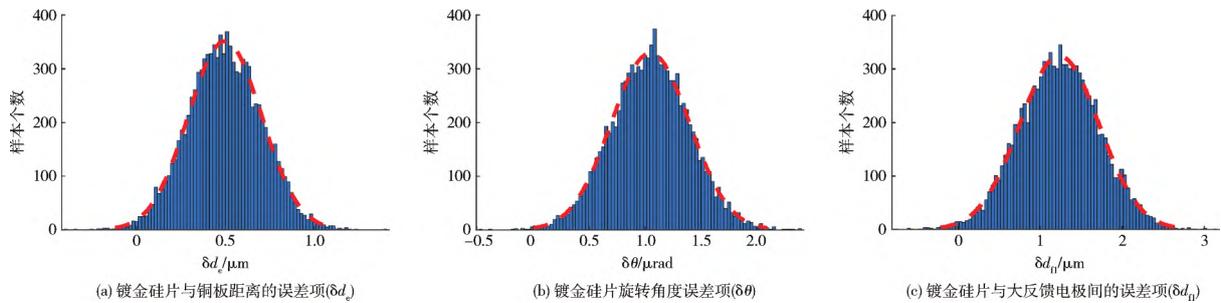


图 13 误差源的分布直方图及其拟合曲线

Fig. 13 Distribution histogram of error source and its fitting curve

由图 13 可得,各个误差项与遗传算法求得的极限误差相近,均为 $10^{-6}$ 量级,2 种算法之间不仅完成了相互验证,而且通过蒙特卡洛算法得到了误差项的数字特征。由于篇幅所限,仿真结果仅列举了关键的几项误差源,装调误差源的数字特征见表 3。

表 3 部分误差项的数字特征

Table 3 Numerical characteristics of partial error term

误差项	均值	标准差
$\delta d_c/\mu\text{m}$	0.5	0.2
$\delta \theta/\mu\text{rad}$	1.0	0.3
$\delta d_{\Omega}/\mu\text{m}$	1.2	0.5

### 5 patch 效应测试实验

通过理论和仿真分析,完成了对实验平台中涉及的一些结构件的加工以及硅片的镀膜工作,镀金硅片如图 14 所示。按照上述仿真分析得到的误差源的范围及误差源的数字特征搭建了 patch 效应测试实验平台,如图 15 所示。



图 14 镀金硅片

Fig. 14 Gold-plated silicon wafer

过蒙特卡洛算法求解各个误差项的均值和标准差,并绘制误差直方图。蒙特卡洛算法是基于大数定理和伯努利定理推导出的一种概率统计方法。此方法的使用步骤:1)分析并确定误差源的类型;2)确定随机数类型;3)确定约束误差模型;4)在随机数中取样  $n$ ,统计落入约束数学误差模型中的数  $m$ ,则可以计算出误差的概率。对于结构方面的单件小批量生产,其加工的几何误差符合均匀分布<sup>[16-17]</sup>;而对于装调方面的误差符合正态分布。按照项目需求,取样点数为 10 000 个即可满足误差分配精度需求,仿真结果如图 13 所示。

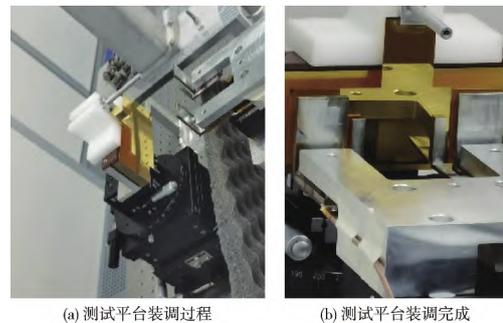


图 15 patch 效应测试实验平台

Fig. 15 Experimental test platform patch effect

patch 效应测试实验示意图如图 16 所示。其中,patch 效应测试平台位于真空度为 $10^{-5}$  Pa 的真空罐内,反馈电极与外部的控制器相连接,镀金铜板与外部的电压源表相连接。最终,测得系统的电势分辨率功率谱曲线,如图 17 所示。

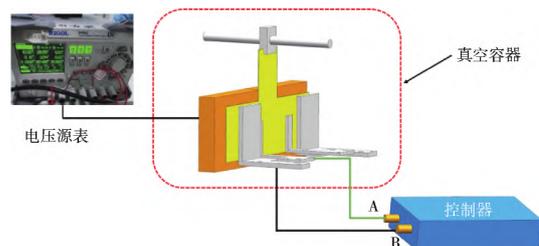


图 16 patch 效应测试实验示意图

Fig. 16 Schematic diagram of the patch effect test experiment

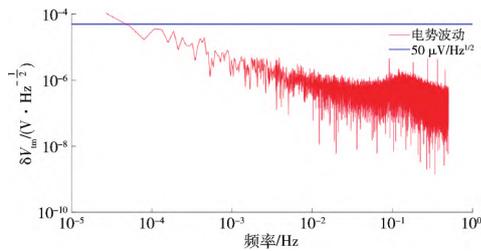


图 17 patch 效应测试系统电势分辨率曲线  
Fig. 17 Potential resolution curve of patch effect test system

观察图 17 可以得到,在 $[0.1 \text{ mHz}, 0.1 \text{ Hz}]$ 系统的电势分辨率小于  $50 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ ,满足空间引力波探测关于 patch 效应噪声分配指标,且系统的电势分辨率在  $0.1 \text{ mHz}$  附近接近  $30 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。充分证明了上述仿真分析过程对实践具有一定的指导作用。

## 6 结 论

本文主要介绍了高精度扭秤平台在理想情况下的数学模型以及存在误差情况下的误差模型,并对扭秤平台惯性构件进行误差分配。由系统的误差函数可知,系统的电势分辨率与灵敏度系数相关,并完成了对系统灵敏度的分析。同时,结合遗传算法的优化,最终分析结果表明,若系统电势分辨率能够达到最高水平,需要满足以下 2 个条件:

1) 装调误差项  $\delta d_e$  和  $\delta d_{\text{fl}}$  需要达到  $\mu\text{m}$  量级;

2) 当测试质量与镀金铜板平行时,平行度控制在  $\mu\text{rad}$  量级。

最终,通过实验验证了此分析过程的正确性与合理性,实验结果表明,系统的电势分辨率在  $0.1 \text{ mHz}$  频点附近接近  $30 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。研究此误差分析作用如下:

1) 此误差分析结果可为控制系统的建立提供误差模型的输入,使得仿真的控制系统更加接近于真实工况,能够节约实验验证过程中所消耗的时间成本;

2) 误差分配结果可以作为加工装调的指导数据;

3) 研究此误差分析任务将会极大地推动空间引力波探测任务中对惯性传感器研究的进程。

(由于印刷关系,查阅本文电子版请登录: <http://www.paper.edu.cn/journal/zgkjlw.shtml>)

### [参考文献] (References)

[1] 蔡伯根, 郭子明, 杨翼, 等. 面向列车完整性监测的惯性传感器校准方法研究[J]. 中国科技论文, 2017, 12(20): 2281-2288.  
CAI B G, GUO Z M, YANG Y, et al. A research on the calibration method of inertial sensor for train integrity monitoring system [J]. China Sciencepaper, 2017,

- 12(20): 2281-2288. (in Chinese)
- [2] 李华东, 齐克奇, 石强, 等. 应用于空间惯性传感器的压电驱动器的性能测试[J]. 中国光学, 2020, 13(2): 344-353.  
LI H D, QI K Q, SHI Q, et al. Performance test of piezoelectric actuators for space inertial sensors [J]. Chinese Optics, 2020, 13(2): 344-353. (in Chinese)
- [3] 罗子人, 白姍, 边星, 等. 空间激光干涉引力波探测[J]. 力学进展, 2013, 43(4): 415-447.  
LUO Z R, BAI S, BIAN X, et al. Gravitational wave detection by space laser interferometry [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(4): 415-447. (in Chinese)
- [4] ROBERTSON N A, BLACKWOOD J R, BUCHMAN S, et al. Kelvin probe measurements: investigations of the patch effect with applications to ST-7 and LISA [J]. Classical and Quantum Gravity, 2006, 23(7): 2665-2680.
- [5] POLLACK S E, SCHLAMMINGER S, GUNDLACH J H. Temporal extent of surface potentials between closely spaced metals [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(7): 071101.
- [6] 尹航. 基于静电控制扭摆方案的导体表面电势测量研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2015: 25-40.  
YIN H. Investigation of the surface potential on the conductor base on an electrostatic-controlled torsion pendulum [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2015: 25-40. (in Chinese)
- [7] 史继芬. 基于自由扭摆测量导体表面电势[D]. 武汉: 华中科技大学, 2017: 12-17.  
SHI J F. Conductor surface potential measurement based on A free torsion pendulum [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2017: 12-17. (in Chinese)
- [8] 王少鑫, 齐克奇, 王玉坤, 等. 电极不对称性对惯性传感器性能损失的研究[J]. 中国光学, 2019, 12(3): 455-462.  
WANG S X, QI K Q, WANG Y K, et al. Study on loss of performance in inertial sensors due to electrode asymmetry [J]. Chinese Optics, 2019, 12(3): 455-462. (in Chinese)
- [9] SCHLAMMINGER S, HAGEDORN C A, FAMULARE M G, et al. High sensitivity torsion balance tests for LISA proof mass modeling [C]// AIP Conference Proceedings. College Park, MD: AIP, 2006: 151-157.
- [10] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 6 版. 北京: 机械工业出版社, 2010: 57-81.  
FEI Y T. Error theory and data processing [M]. 6th ed. Beijing: China Machine Press, 2010: 57-81. (in Chinese)
- [11] 徐卫良, 邓家贤, 吴慈生. 确定连杆机构运动误差的矩阵法[J]. 南京工学院学报, 1986, 16(3): 32-42.  
XU W L, DENG J X, WU C S. Matrix method for determining the kinematic errors of a linkage [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 1986, 16(3): 32-42. (in Chinese)

(下转第 920 页)

- and application of bench blasting interval length in Shuangli mine [J]. *China Mining Magazine*, 2020, 29(6): 155-158. (in Chinese)
- [8] 高启栋, 卢文波, 冷振东, 等. 岩石爆破中孔内起爆位置对爆炸能量传输的调控作用研究[J]. *岩土工程学报*, 2020, 42(11): 2050-2058.  
GAO Q D, LU W B, LENG Z D, et al. Regulating effect of detonator location in blast-holes on transmission of explosion energy in rock blasting [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, 42(11): 2050-2058. (in Chinese)
- [9] 毛泽凌. 柱状装药下的掏槽成腔计算模型研究[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2018: 59-62.  
MAO Z L. Study on calculation model of cut cavity formation under cylindrical charge [D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2018: 59-62. (in Chinese)
- [10] WANG M Y, QIU Y Y, YUE S L. Similitude laws and modeling experiments of explosion cratering in multi-layered geotechnical media [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, 117: 32-47.
- [11] YE T Q. Field experiment for blasting crater [J]. *Journal of China University of Mining and Technology*, 2008, 18(2): 224-228.
- [12] 邱胜光, 孙明武. 基于爆破漏斗试验的大直径深孔爆破参数研究[J]. *矿业研究与开发*, 2020, 40(1): 64-69.  
QIU S G, SUN M W. Study on the parameters of large-diameter deep-hole blasting based on the blasting crater test [J]. *Mining Research and Development*, 2020, 40(1): 64-69. (in Chinese)
- [13] 郭洋. 条形药包爆破物理过程及动态断裂力学特性试验研究[D]. 北京: 中国矿业大学(北京), 2018: 11-98.  
GUO Y. Experimental study on explosive process and dynamic fracture mechanics properties with linear charge blasting [D]. Beijing: China University of Mining & Technology (Beijing), 2018: 11-98. (in Chinese)
- [14] 周传波, 范效锋, 李政, 等. 基于爆破漏斗试验的大直径深孔爆破参数研究[J]. *矿冶工程*, 2006, 26(2): 9-13.  
ZHOU C B, FAN X F, LI Z, et al. Study of parameters of large diameter deep hole blasting based on blasting crater test [J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2006, 26(2): 9-13. (in Chinese)
- [15] 皇新宇, 纪强, 张宪堂, 等. 地应力作用下四孔掏槽爆破破岩机理数值模拟研究[J]. *山东科技大学学报(自然科学版)*, 2022, 41(2): 60-69.  
HUANG X Y, JI Q, ZHANG X T, et al. Numerical simulation research on rock breaking mechanism of four-hole cut blasting under ground stress [J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)*, 2022, 41(2): 60-69. (in Chinese)
- [16] 宗琦, 马长世. 通过爆破漏斗模拟试验求算装药量[J]. *阜新矿业学院学报(自然科学版)*, 1997, 16(2): 139-142.  
ZONG Q, MA C S. Charge weight solution based on the model test on blasting crater [J]. *Journal of Liaoning Technical University (Natural Science)*, 1997, 16(2): 139-142. (in Chinese)
- (上接第 912 页)
- [12] HOLLAND J H. *Adaptation in natural and artificial systems* [M]. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975: 48-75.
- [13] 李金娟. 遗传算法及应用的研究[J]. *电脑与信息技术*, 2013, 21(2): 5-7, 12.  
LI J J. Research of genetic algorithms and application [J]. *Computer and Information Technology*, 2013, 21(2): 5-7, 12. (in Chinese)
- [14] 高志波, 龙科军, 王倩, 等. 车辆路线问题的自适应遗传模拟退火算法[J]. *中国科技论文*, 2017, 12(7): 764-769.  
GAO Z B, LONG K J, WANG Q, et al. A self-adaptive genetically simulated annealing algorithm of vehicle routing problem [J]. *China Sciencepaper*, 2017, 12(7): 764-769. (in Chinese)
- [15] 秦娜, 刘凡, 刘亚龙, 等. 基于遗传算法优化 BP 神经网络的钛合金旋转超声磨削力预测[J]. *中国科技论文*, 2017, 12(10): 1128-1131, 1156.  
QIN N, LIU F, LIU Y L, et al. Prediction of grinding force in rotary ultrasonic grinding of titanium alloy based on BP neural network optimized by genetic algorithm [J]. *China Sciencepaper*, 2017, 12(10): 1128-1131, 1156. (in Chinese)
- [16] 柯明扬. *机械制造工艺学*[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1996: 61-142.  
KE M Y. *Machinery technology* [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 1996: 61-142. (in Chinese)
- [17] 何雪浣, 张敏, 谢里阳, 等. 3-TPT 型并联机床的精度分析与仿真[J]. *中国机械工程*, 2008, 19(11): 1336-1339.  
HE X H, ZHANG M, XIE L Y, et al. Accuracy analysis and simulation of 3-TPT parallel machine tool [J]. *China Mechanical Engineering*, 2008, 19(11): 1336-1339. (in Chinese)