

基于整体模型的中低雷诺数定常流固耦合 拓扑优化研究*

苗永壮^{1,2} 张健宇¹ 韩海涛¹ 赵宁^{1,2} 邓永波¹ 张卫红³

(1 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033; 2 中国科学院大学, 北京 100049;

3 西北工业大学航宇材料结构一体化设计与增材制造装备技术国际联合研究中心, 西安 710072)

摘要: 当前流固耦合拓扑优化方法的研究突显了在流体和结构力学两套截然不同的控制方程之间交替使用的困难,即在分离的流体和固体域之间施加耦合边界条件的困难。为了解决流固耦合拓扑优化面临的流固界面表达难题,基于流固耦合拓扑优化问题的整体模型,采用多孔介质模型进行材质插值,建立了流固耦合问题的拓扑优化模型,进而通过连续伴随方法获得模型的伴随灵敏度,以及数值求解 Navier-Stokes 方程和线弹性力学控制方程,实现所建立拓扑优化模型的求解;通过雷诺数 1~500 的二维悬臂梁和二维通道流固耦合拓扑优化仿真结果,验证了建立的流固耦合拓扑优化模型。

关键词: 拓扑优化; 流固耦合; 材质插值; 连续伴随分析

中图分类号: TH114; O357 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-3133(2023)11-0094-11

DOI: 10.16731/j.cnki.1671-3133.2023.11.013

Research on monolithic model based topology optimization of steady fluid-structure interaction problem with moderate and low Reynolds number

MIAO Yongzhuang^{1,2} ZHANG Jianyu¹ HAN Haitao¹ ZHAO Ning^{1,2} ,
DENG Yongbo¹ ZHANG Weihong³

(1 Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3 State IJR Center of Aerospace Design and Additive Manufacturing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Current research on fluid-structure interaction topology optimization methods highlights the difficulty of alternating between different sets of control equations in fluid and structural mechanics, that is the difficulty of imposing coupling boundary conditions between separated fluid and solid domains. In order to solve the problem that on the expression of the fluid-structure interface in the process of topology optimization for fluid-structure interaction, based on the monolithic model of the fluid-structure interaction topology optimization problem, the porous medium model for material interpolation was utilized. The topology optimization model of the fluid-structure interaction problem was established and then the adjoint sensitivity of the model was obtained by continuous adjoint method, and the Navier-Stokes equation and linear elasticity control equation were numerically solved, so as to realize the solution of the established topology optimization model. Through the simulation results of two-dimensional cantilever beam and two-dimensional channel fluid-structure interaction topology optimization simulation with a Reynolds number range of 1~500, the established fluid-structure interaction topology optimization model was verified.

Keywords: topology optimization; fluid-structure interaction; material interpolation; continuous adjoint analysis

* 中国科学院稳定支持基础研究领域青年团队项目(YSBR-066); 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所创新面上项目; 天津市科技局省院合作资金项目(22YFYSHZ00100)

0 引言

流固耦合问题是一个涉及运动流体与弹性或刚性、可移动或约束结构之间相互作用的多物理耦合问题。该类问题是一种强耦合力学现象,即结构变形取决于流体流动,流体流动又受结构变形影响,它与大量工程应用和自然现象相关,如发动机、压缩机、医疗器械、人体血液系统和人肺系统等^[1-4]。过去的研究工作中,流固耦合问题的拓扑优化^[5]的研究也很多^[6-10]。然而,对当前研究的分析发现流固耦合拓扑研究过程中存在施加边界条件的困难。

在流固耦合分析中,根据流体和结构力学控制方程中的状态变量如何耦合,通常采用分离分析域的交错或整体分析方法,这些分析方法的主要特点之一是流体域与结构域的分隔。流体求解器使用流体域中的 Navier-Stokes 方程计算速度和压力,并将压力负载转移到流体和结构域之间预定义的、明确的相互作用边界上。结构求解器计算结构位移,并将这些位移传输回流体求解器,以更新流体域和显式相互作用边界,这些边界通常具有无滑移边界条件。尺寸和形状优化经常使用这些具有分离设计域的交错或整体分析方法。通过迭代改变流体和结构的轮廓,可以得到最佳的尺寸和形状。然而,分离分析域的方法很难与拓扑优化相结合。主要困难之一是,不同的流体和结构域以及耦合边界条件必须在每次迭代中通过空间定义的设计变量进行插值。此外,在拓扑优化中,对于中间设计变量控制方程的耦合边界条件的数值方法还没有很好的研究。YOON^[11]提出了一种新的整体分析方法,采用统一的分析和设计域,使稳态流固耦合问题的拓扑优化成为可能。

拓扑优化自提出以来,在工程和应用科学的许多领域都得到了应用。与尺寸和形状优化相比,拓扑优化可用于改变设计域内部的拓扑域和找到最佳布局,而不需要初始给定拓扑结构。拓扑优化被认为是在满足给定性能指标前提下,解决结构设计区域材料分布最稳健的方法之一。优化方法一般有均匀化方法^[12]、变密度法^[13]、水平集法^[14]以及渐进结构法^[15]等。一些学者的工作致力于开发多物理系统的拓扑优化方法,如流体、壳体、传热、热机械和声学等,以及理论层面的拓扑优化^[16-25]。结合拓扑优化的优点,本文采用此方法对流固耦合问题进行求解。

本文利用整体模型方法对流固耦合问题控制方程进行推导,通过将具有低杨氏模量的固体材料填充

到流体域中,并使用具有高抗渗性的多孔材料近似固体域。基于固体和流体域的可扩展性,可以定义具有二值的材质密度来表示结构拓扑,并区分填充在固体和流体域中的固体材料和多孔材料。在拓扑优化过程中,采用伴随分析得到伴随灵敏度,从而得到拓扑结构。通过二维流固耦合问题拓扑优化数值算例,对理论进行验证。最后,对研究结果进行总结和讨论,并对未来研究方向进行展望。

1 理论

本文第 1~第 2 章介绍了流固耦合问题的拓扑优化方法,包括整体模型、材质插值、拓扑优化模型、模型伴随分析和数值实现。

1.1 流固耦合问题的整体模型

在稳态流固相互作用问题中,流动和结构变形是通过固液界面耦合的。在低雷诺数和中等雷诺数的情况下,流体结构变形和流动可以分别用弹性固体力学的控制方程和稳态 Navier-Stokes 方程来描述,本文考虑的是线弹性体和牛顿流体。图 1 所示为流固耦合相互作用示意图。

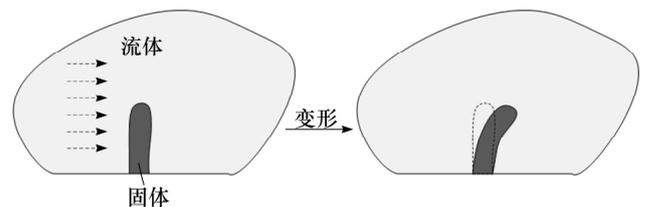


图 1 流固耦合相互作用示意图

对于线弹性体,应力张量与应变张量本构关系为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E_s}{1+k} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{1-2k} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{I} \right] \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; E_s 为固体杨氏模量; k 为泊松系数; \boldsymbol{I} 为单位张量; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变张量。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T) \quad (2)$$

式中: \boldsymbol{v} 为弹性变形引起的位移; ∇ 为原笛卡尔坐标系下的梯度算子。

在静力平衡的基础上,可导出弹性固体力学的控制方程为:

$$\begin{cases} \text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \in \Omega_s \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \in \Gamma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \boldsymbol{x} \in \Gamma_{sf} \end{cases} \quad (3)$$

式中: div 为散度算子; \boldsymbol{x} 为区域内任意一点坐标; Ω_s 为固体域; Γ_0 为固定的固体边界; Γ_{sf} 为加载流体应力

g 的流固界面; n 为流固界面上由流体向固体方向的法向量。

将式 (1) 代入式 (3) 控制方程可转化为:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma_0 \\ \left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{g} & \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \end{cases} \quad (4)$$

基于牛顿流体与动量质量守恒定律的本构关系, 在固体位移引起变形的流体域中流体流动的稳态 Navier-Stokes 方程为:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div} [\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla p = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Omega'_f \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \forall \mathbf{x}' \in \Omega' \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_i \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_w \\ [-\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + p\mathbf{I}] \mathbf{n}' = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_o \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_{sf} \end{cases} \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} 和 p 分别为流体流速和压力; \mathbf{u}_0 为流体的初始流速; ρ 和 η 分别为流体密度和黏度系数; ∇ 和 div 分别为变形坐标系中的梯度算子和散度算子; \mathbf{x}' 为变形坐标系中的坐标; Ω'_f 和 Ω' 分别为变形流体域和计算域; Γ'_i 、 Γ'_w 、 Γ'_o 和 Γ'_{sf} 分别为变形计算域的入口、壁面、出口和流固界面; \mathbf{n}' 为变形计算域流体向固体方向的法向量。

式 (4) 和式 (5) 中, 变形流固界面 Γ'_{sf} 处的点坐标与其对应的 Γ_{sf} 处的坐标关系为:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \quad (6)$$

在基于上述模型求解流固耦合问题时, 需要明确表示流固界面。然而, 在拓扑优化过程中, 实体结构通常是隐式描述的, 因此流固界面也是隐式表达的, 造成了流固耦合问题解决的困难。为了解决这一矛盾, 文献 [9] 开发了一种实现流固耦合问题拓扑优化的整体模型。

在文献 [9] 开发的整体模型中, 固体力学的定义域和流体流动的定义域近似地扩展到包括固体域和流体域在内的整个计算域, 去除式 (4) 和式 (5) 中在界面处施加的界面条件, 从而完美地解决流固界面隐式表达的困难, 扩展是通过将具有低杨氏模量的固体材

料填充到流体域中, 并使用具有高抗渗性的多孔材料近似于固体域。然后, 将整体模型描述为:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \operatorname{div} \left[\frac{E_f}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \left(\frac{E_f}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_s \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega \cup \Gamma_0 \\ \left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{g} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div} [\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla p = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Omega'_f \\ \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div} [\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla p = -\alpha_s \mathbf{u} & \forall \mathbf{x}' \in \Omega' \setminus \Omega'_f \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \forall \mathbf{x}' \in \Omega' \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_w \\ [-\eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + p\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_o \end{cases} \quad (8)$$

式中: E_f 为填充材料在流体域中的杨氏模量, 它满足 $E_f \ll E_s$; α_s 为用来近似固体材料的多孔材料的抗渗性, 在选择时应满足 $\alpha_s \gg \rho$, 通常可以选择 $\alpha_s = 10^4 \rho$ 。

在式 (8) 中, 去掉了流固界面处的防滑边界条件, 因为流固界面的固体区域是用高抗渗性的多孔材料近似的。对于计算域 Ω 及其变形对应的 Ω' , 式 (6) 中的坐标变换可以扩展到整个计算域, 对于 $\forall \mathbf{x}' \in \Omega'$ 有:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (9)$$

根据式 (9) 中的坐标变换, 可以将 Ω 变换为 Ω' ; 因此, 式 (8) 可以转化为:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{J}^{-1} \operatorname{div} [\eta(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{J}^{-1} \nabla p = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \\ \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{J}^{-1} \operatorname{div} [\eta(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{J}^{-1} \nabla p = -\alpha_s \mathbf{u} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_f \\ \mathbf{J}^{-1} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_w \\ [-\eta(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T) + p\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_o \end{cases} \quad (10)$$

式中: Ω_f 为变换后的流体域, 它满足关系 $\Omega_f \cup \Omega_s = \Omega$; J 为由式(9)导出的雅可比矩阵。

$$J = I + \nabla v \quad (11)$$

由于固体变形是由流体流动施加的应力引起的, 因此流固界面处的固液应力满足以下连续条件:

$$\left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla v + \nabla v^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \text{div} v \right) I \right] \cdot n = [-\eta(J^{-1} \nabla u + J^{-1} \nabla u^T) + pI] \cdot n \quad \forall x \in \Gamma_{sf} \quad (12)$$

即流固界面处的流体应力为:

$$g = [-\eta(J^{-1} \nabla u + J^{-1} \nabla u^T) + pI] \cdot n \quad \forall x \in \Gamma_{sf} \quad (13)$$

根据高斯定理, 流固界面处的流体应力可以转化为在 Ω_s 区域内加载在固体上的体积力, 即

$$f = J^{-1} \text{div} [\eta(J^{-1} \nabla u + J^{-1} \nabla u^T) + pI] \cdot n \quad \forall x \in \Omega_s \quad (14)$$

式中: f 为等效于流固界面处流体应力的体积力。

然后, 将扩展后的固体域控制方程进一步转化为:

$$\begin{cases} \text{div} \left[\frac{E_s}{2(1+k)} (\nabla v + \nabla v^T) + \left(\frac{E_s}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \text{div} v \right) I \right] = -f \\ \quad \forall x \in \Omega_s \\ \text{div} \left[\frac{E_f}{2(1+k)} (\nabla v + \nabla v^T) + \left(\frac{E_f}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \text{div} v \right) I \right] = 0 \\ \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_s \\ v = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cup \Gamma_0 \end{cases} \quad (15)$$

1.2 拓扑优化的材质插值

基于固体和流体域的可扩展性, 可以定义具有二值化的材质密度来表示结构拓扑, 并区分填充在固体和流体域中的固体材料和多孔材料。材质密度可定义为:

$$\gamma_p = \begin{cases} 0 & \forall x \in \Omega_s \\ 1 & \forall x \in \Omega_f \end{cases} \quad (16)$$

式中: γ_p 为材质密度。

根据确定的材质密度, 填充在固体和流体区域的固体材料的杨氏模量可表示为:

$$E = \begin{cases} E_s & \gamma_p = 0 \\ E_f & \gamma_p = 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中: E 为定义在计算域上的杨氏模量。

多孔材料在固体和流体域中的抗渗性能可以表示为:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_s & \gamma_p = 0 \\ \alpha_f & \gamma_p = 1 \end{cases} \quad (18)$$

式中: α 为计算域中定义的抗渗性; 对于流体 $\alpha_f = 0$ 。

同时, 加载在固体上的体积力可以扩展到固体域和流体域, 即:

$$\Psi f = \Psi J^{-1} \text{div} [-\eta(J^{-1} \nabla u + J^{-1} \nabla u^T) + pI] = -\Psi \{ \rho [u \cdot (J^{-1} \nabla)] u + \alpha u \} \quad \forall x \in \Omega \quad (19)$$

同时:

$$\Psi = \begin{cases} 1 & \gamma_p = 0 \\ 0 & \gamma_p = 1 \end{cases} \quad (20)$$

式中: Ψ 为用来表示体积力存在的函数。

基于拓扑优化的材质分布方法, 可将式(16)上的二元材质密度放宽为在设计域 $[0, 1]$ 中连续变化。根据放宽后的材质密度和式(17)~式(19)中杨氏模量、抗渗性和体积力的表达式, 可构造流固耦合问题的材质插值, 即:

$$E = \begin{cases} E_f + (E_s - E_f) \gamma_p^3 & \forall x \in \Omega_D \\ E_s & \forall x \in \Omega_s \setminus \Omega_D \\ E_f & \forall x \in \Omega_f \setminus \Omega_D \end{cases} \quad (21)$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_f + (\alpha_s - \alpha_f) \gamma_p^3 & \forall x \in \Omega_D \\ \alpha_s & \forall x \in \Omega_s \setminus \Omega_D \\ \alpha_f & \forall x \in \Omega_f \setminus \Omega_D \end{cases} \quad (22)$$

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_f + (\Psi_s - \Psi_f) \gamma_p^3 & \forall x \in \Omega_D \\ \Psi_s & \forall x \in \Omega_s \setminus \Omega_D \\ \Psi_f & \forall x \in \Omega_f \setminus \Omega_D \end{cases} \quad (23)$$

式中: α_f 为流体的抗渗性, 取值为 0; $\Psi_s = 1$ 和 $\Psi_f = 1$ 为力存在和消失的指标函数; Ω_D 为设计域, 它是计算域的子集, 即 $\Omega_D \subset \Omega$ 。

材质密度是通过在设计域中定义的设计变量上依次实现偏微分方程滤波和阈值投影得到的。这个设计变量也在 $[0, 1]$ 内连续取值。这里使用阈值投影去除灰色区域, 并控制所得结构的特征尺寸。设计变量的 PDE 滤波器通过求解以下 PDE^[26] 实现:

$$\begin{cases} -\text{div}(r_f^2 \nabla \gamma_f) + \gamma_f = \gamma & \forall x \in \Omega_D \\ n \cdot \nabla \gamma_f = 0 & \forall x \in \partial\Omega_D \end{cases} \quad (24)$$

式中: γ 为设计变量; γ_f 为过滤后的设计变量; r_f 为过滤半径, 它是常数。

滤波后材质密度的阈值投影实现^[27-28]为:

$$\gamma_p = \frac{\tanh(\beta \xi) + \tanh[\beta(\gamma_f - \xi)]}{\tanh(\beta \xi) + \tanh[\beta(1 - \xi)]} \quad (25)$$

式中: β 和 ξ 为阈值投影参数, 其值通过数值实验确定^[28]。

PDE 滤波器的变分公式定义在 Ω_D 上, 它可以根

据伽辽金方法推导为:

$$\begin{aligned} & \text{求 } \gamma_f \in H(\Omega_D) \text{ for } \gamma^2 \in L^2(\Omega_D) \\ & \text{s.t. } \int_{\Omega_D} (r_f^2 \gamma_f \cdot \tilde{\gamma}_f + \gamma_f \tilde{\gamma}_f - \gamma \tilde{\gamma}_f) \, d\Omega = 0 \\ & \forall \tilde{\gamma}_f \in H(\Omega_D) \end{aligned} \quad (26)$$

式中: $\tilde{\gamma}_f$ 为 γ_f 的试函数; $H(\Omega_D)$ 为定义在空间 Ω_D 上的一阶 Sobolev 空间; $L^2(\Omega_D)$ 为定义在 Ω_D 上的二阶 Lebesgue 空间。

根据式(21)~式(23)的材质插值,可以将本文第2.1节中的整体模型进一步变换为:

$$\begin{cases} \text{div} \left[\frac{E}{2(1+k)} (\nabla v + \nabla v^T) + \left(\frac{E}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \text{div} v \right) \mathbf{I} \right] = \\ \quad -\Psi f \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ v = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cup \Gamma_0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{J}^{-1} \text{div} [\eta(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T)] + \\ \quad \mathbf{J}^{-1} \nabla p = -\alpha_s \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_w \\ [-\eta(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T) + p \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_o \end{cases} \quad (28)$$

式(27)和(28)中的整体模型的变分公式被考虑在 Ω_D 上定义的一阶 Sobolev 空间中。它们可以根据伽辽金法推导为:

$$\begin{aligned} & \text{求 } v \in [H(\Omega_D)]^d \text{ 其中 } v = \mathbf{0} \text{ 当 } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cup \Gamma_0 \\ & \text{约束条件为:} \\ & \int_{\Omega} - \left[\frac{E}{2(1+k)} (\nabla v + \nabla v^T) + \left(\frac{E}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \text{div} v \right) \cdot \mathbf{I} \right] : \nabla \tilde{v} - \Psi \{ \rho [\mathbf{u}(\mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}] \cdot \\ & \quad \tilde{v} \, d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{v} \in H(\Omega_D) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{求} \begin{cases} \mathbf{u} \in [H(\Omega_D)]^d \\ p \in L^2(\Omega_D) \end{cases}$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_w \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \rho [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\eta}{2} (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T) : \\ & \quad (\mathbf{J}^{-1} \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T) - p \mathbf{J}^{-1} \text{div} \tilde{\mathbf{u}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{p} \mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \} \cdot \det(\mathbf{J}) \, d\Omega = 0 \\ & \forall \tilde{\mathbf{u}} \in [H(\Omega_D)]^d \quad \forall \tilde{p} \in H(\Omega_D) \end{aligned} \quad (30)$$

式中: \tilde{v} 和 $\tilde{\mathbf{u}}$ 分别为 v 和 \mathbf{u} 的试函数; \tilde{p} 为 p 的试函数; $H(\Omega_D)$ 为定义在 Ω_D 上的一阶 Sobolev 空间; $L^2(\Omega_D)$ 为定义在 Ω_D 上的二阶 Lebesgue 空间; d 为维数,对于二维问题,其值为 2; $\det(\mathbf{J})$ 为雅可比矩阵的行列式。

1.3 流固耦合问题的拓扑优化模型

基于引入的整体模型和材质插值,流固耦合问题的拓扑优化模型可以构造为如下形式。

$$\begin{aligned} & \text{求 } \gamma \in [0, 1] \text{ 使 } \frac{J}{J_0} \text{ 最小, 其中:} \\ & J = \int_{\Omega} A_1(v, \nabla v; \gamma_p) \, d\Omega + \int_{\Omega} A_2(\mathbf{u}, \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}; p; \gamma_p) \cdot \\ & \quad \det(\mathbf{J}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_b} B_1(v) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_b} B_2(\mathbf{u}, p) \, d\Gamma \end{aligned}$$

约束条件满足式(24)、式(25)、式(27)、式(28), 以及:

$$\begin{cases} |v - v_0| \leq 1 \times 10^{-3} \\ v = \frac{1}{|\Omega_D|} \int_{\Omega_b} \gamma_p \, d\Omega \\ |\Omega_D| = \int_{\Omega_b} 1 \, d\Omega \end{cases} \quad (31)$$

式中: J_0 为与设计变量初始分布相对应的设计目标值; J 为设计变量的设计目标值; A_1 、 A_2 、 B_1 和 B_2 为 J 的被积函数; Γ_b 为 Ω 边界的接口或外部部分; v 为固体的体积分; v_0 为设定的固体体积分; $|\Omega_D|$ 为设计域的体积。

1.4 拓扑优化模型的伴随分析

式(31)中的拓扑优化问题可以通过使用基于梯度信息的迭代过程来解决,其中使用伴随灵敏度来确定相关的梯度信息。对设计目标和体积约束进行连续伴随分析,得到伴随灵敏度^[29]。基于连续伴随分析方法,推导出设计目标 J 的伴随灵敏度 δJ 为:

$$\delta J = - \int_{\Omega_b} \gamma_{fa} \tilde{\gamma} \, d\Omega \quad \forall \tilde{\gamma} \in L^2(\Omega_D) \quad (32)$$

式中: γ_{fa} 为过滤后设计变量 γ_f 的伴随变量; $\tilde{\gamma}$ 为设计变量 γ 的试函数; δ 为一阶变分算子。

伴随变量可以由变分公式中的伴随方程导出。整体模型中控制方程的伴随方程的变分公式可导出为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a \in [H(\Omega_D)]^d & \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \cup \Gamma_w \\ p_a \in L^2(\Omega_D) \end{cases}$$

约束条件为:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_a + \frac{\partial A_2}{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u})} : (\mathbf{J}^{-1} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_a) + \frac{\partial A_2}{\partial \mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}_a + \right. \\ \left. \mathbf{p} \{ [\tilde{\mathbf{u}}_a \cdot (\mathbf{J}^{-1} \nabla)] \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_a \} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_a + \right. \\ \left. \frac{\eta}{2} (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a^T) : (\mathbf{J}^{-1} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_a + \mathbf{J}^{-1} \cdot \right. \\ \left. \nabla \tilde{\mathbf{u}}_a^T) - \tilde{\mathbf{p}}_a \mathbf{J}^{-1} \text{div} \tilde{\mathbf{u}}_a - \mathbf{p}_a \mathbf{J}^{-1} \text{div} \tilde{\mathbf{u}}_a + \alpha \mathbf{u}_a \cdot \right. \\ \left. \tilde{\mathbf{u}}_a \right\} \det(\mathbf{J}) - \Psi \{ \rho [\tilde{\mathbf{u}}_a (\mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \\ (\mathbf{J}^{-1} \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_a] + \alpha \tilde{\mathbf{u}}_a \} \cdot \mathbf{v}_a d\Omega + \int_{\Gamma_b} \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_a + \\ \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}_a d\Gamma = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{u}}_a \in [H(\Omega_D)]^d \\ \forall \tilde{\mathbf{p}}_a \in L^2(\Omega_D) \quad (33)$$

求 $\mathbf{v}_a \in [H(\Omega_D)]^d$, 其中 $\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$, 当 $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cup \Gamma_0$ 时 约束条件为:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A_1}{\partial \mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_a + \frac{\partial A_1}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a - \left[\frac{E}{2(1+k)} (\nabla \mathbf{v}_a + \nabla \mathbf{v}_a^T) + \right. \\ \left. \left(\frac{E}{1+k} \times \frac{k}{1-2k} \text{div} \mathbf{v}_a \right) \mathbf{I} \right] : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a - \Psi \rho \cdot \\ \left[\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u})}{\partial \nabla \mathbf{v}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \right] \cdot \mathbf{v}_a + \\ \left\{ \rho \left[\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u})}{\partial \nabla \mathbf{v}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \right] \right\} \mathbf{u}_a + \\ \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u})}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a + \frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T)}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \right) : \\ \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a^T \right) + \frac{\eta}{2} (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T) : \\ \left(\frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a)}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a + \frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a^T)}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \right) - \\ - \mathbf{p} \frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u}_a)}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a - \mathbf{p}_a \frac{\partial (\mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u})}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \\ \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \left. \right\} \cdot \det(\mathbf{J}) + \{ \rho [\mathbf{u} (\mathbf{J}^{-1} \nabla)] \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a + \\ \frac{\eta}{2} (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}^T) : (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a + \\ \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{u}_a^T) - \mathbf{p}_a \mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u}_a - \mathbf{p}_a \mathbf{J}^{-1} \text{div} \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} \cdot \\ \mathbf{u}_a \} \left(\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial \nabla \mathbf{v}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_a \right) d\Omega + \int_{\Gamma_b} \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v}_a d\Gamma = 0 \\ \forall \tilde{\mathbf{v}}_a \in [H(\Omega_D)]^d \quad (34)$$

式中: $\mathbf{u}_a, \mathbf{p}_a, \mathbf{v}_a$ 分别为 $\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{v}$ 的伴随变量; $\tilde{\mathbf{u}}_a, \tilde{\mathbf{p}}_a, \tilde{\mathbf{v}}_a$ 分

别为 $\mathbf{u}_a, \mathbf{p}_a, \mathbf{v}_a$ 的试函数。

PDE 滤波器伴随方程的变分公式如下:

求 $\gamma_{fa} \in H(\Omega_D)$

$$\text{s.t.} \int_{\Omega_b} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \gamma_p} + \frac{\partial A_1}{\partial \gamma_f} \right) \frac{\partial \gamma_p}{\partial \gamma_f} \tilde{\gamma}_{fa} + \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma_p} \frac{\partial \gamma_p}{\partial \gamma_f} \cdot \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a \det(\mathbf{J}) \tilde{\gamma}_{fa} - \left[\frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{k}{1-2k} \text{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} \right] : \nabla \mathbf{v}_a \frac{\partial E}{\partial \gamma_p} \frac{\partial \gamma_p}{\partial \gamma_f} \tilde{\gamma}_{fa} - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_p} \cdot \right. \\ \left. [\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \nabla) \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}_a + \Psi \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_a \right\} \cdot \\ \frac{\partial \gamma_p}{\partial \gamma_f} \tilde{\gamma}_{fa} + r_f^2 \nabla \tilde{\gamma}_{fa} \cdot \nabla \tilde{\gamma}_{fa} + \gamma_{fa} \tilde{\gamma}_{fa} d\Omega = 0 \\ \forall \tilde{\gamma}_{fa} \in H(\Omega_D) \quad (35)$$

式中: $\tilde{\gamma}_{fa}$ 为 γ_{fa} 的试函数。

对于体积约束, 体积分 v 的伴随灵敏度 δv 为:

$$\delta v = - \int_{\Omega_b} \gamma_{fa} \tilde{\gamma} d\Omega \quad \forall \tilde{\gamma} \in L^2(\Omega_D) \quad (36)$$

伴随变量 γ_{fa} 可通过求解的 PDE 滤波器伴随方程的变分公式得到:

求 $\gamma_{fa} \in H(\Omega_D)$

$$\text{s.t.} \int_{\Omega_b} \frac{\partial \gamma_p}{\partial \gamma_f} \tilde{\gamma}_{fa} + r_f^2 \gamma_{fa} \nabla \tilde{\gamma}_{fa} + \gamma_{fa} \tilde{\gamma}_{fa} d\Omega = 0$$

$$\forall \tilde{\gamma}_{fa} \in H(\Omega_D) \quad (37)$$

推导式 (32) 和式 (37) 中的伴随灵敏度后, 设计变量可以迭代演化, 以确定流固相互作用问题的拓扑结构。

2 数值实现

式 (31) 中的拓扑优化问题是通过使用下面描述的迭代过程来解决的, 其中包含了迭代解的循环。本文利用有限元法求解了相关的偏微分方程和伴随方程的变分公式^[30]。

为保证数值解的良好拟合性, 采用满足输入条件的 Taylor-Hood 元求解流体流动^[31]的控制方程, 采用二次元求解固体变形的控制方程。利用线性元插值结构拓扑的设计变量, 求解设计变量的偏微分方程滤波器的变分公式和相应的伴随方程。计算域基于四边形单元离散化的 Taylor-Hood、线性元和二次元网格如图 2 所示。

解决流固耦合拓扑优化问题的迭代求解伪代码如下:

式(31)的迭代解:

参数设置: 设 u_0, ρ, η 和 v_0

设:

$$\gamma \leftarrow v_0, r_f = 2h, \rho \leftarrow 1 \times 10^3, \eta \leftarrow 1 \times 10^{-3}, n_{\max} \leftarrow 1 \times 10^{-3},$$

$$n_i \leftarrow 1, \xi \leftarrow 0.5, \beta \leftarrow 1, \alpha_{\max} \leftarrow 10^4 \rho, \alpha_{\min} \leftarrow 0,$$

$$E_s \leftarrow 2 \times 10^{11}, E_f \leftarrow 10^{-6} E_s, \nu \leftarrow 0.33, \Psi_s \leftarrow 1, \Psi_f \leftarrow 0$$

循环

从式(26)求解 γ_f ;

投影 γ_f 得到 γ_p 并计算 v ;

从等式(29)和(30)中求解 u, p, v 并计算 J/J_0 ;

解等式(33)和(34)中的 u_a, p_a, v_a ;

从式(35)求解 γ_{fa} ;

根据式(32)计算 δJ ;

从式(37)中求解 γ_{fa} ;

根据式(36)计算 δv ;

根据 δJ 和 δv 更新;

if mod($n_i, 30$) == 0

$$\beta \leftarrow 2\beta$$

end if

if ($n_i = n_{\max}$)

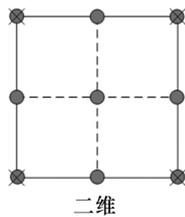
$$\text{or} \begin{cases} \beta = 2^{10} \\ \frac{1}{5} \sum_{m=0}^4 |J_{n_i-m} - J_{n_i-(m+1)}| / J_0 \leq 1 \times 10^{-3} \\ |v - v_0| \leq 1 \times 10^{-3} \end{cases}$$

break

end if

$$n_i \leftarrow n_{i+1}$$

结束循环



⊗ Taylor-Hood元素的节点; ×线性元素的节点

● 二次元的节点

图2 计算域基于四边形单元离散化的 Taylor-Hood、线性元和二次元网格

在迭代解循环中: h 为网络宽度; n_i 为循环指数; n_{\max} 为 n_i 的最大值; J_{n_i-m} 和 $J_{n_i-(m+1)}$ 为第 n_i-m 和 $n_i-(m+1)$ 次迭代中 J 的值; mod 为用于获取余数的运算符。

在迭代过程中,初始值为 1 的投影参数 β 每迭代 30 次翻倍;当达到最大迭代次数时,或连续 5 次迭代中设计目标的平均变化和面积及体积约束的残差同时满足时,循环停止。采用移动渐近线法更新设计变量^[32]。

3 算例结果

在本章中,利用上述理论和拓扑程序对 3 个二维流固耦合问题进行固体结构拓扑优化,3 个例子分别是二维悬臂梁支撑结构优化问题、二维悬臂梁在有外力作用下支撑结构的优化问题和二维通道双侧支撑结构优化问题。本文对单入口和单出口流固耦合结构优化问题进行求解,流道宽度设为 1×10^{-4} m,流体动力黏度设为 1×10^{-3} kg/(m·s),流体密度为 1×10^3 kg/m³。网格使用均匀分布网格,物理场网格采用线性四边形单元。

3.1 二维悬臂梁问题

二维悬臂梁流固耦合问题如图 3 所示,本算例实现在 1~500 雷诺数情况下的单入口单出口流固耦合设计域结构拓扑优化问题。入口速度 w 分布为管道中流体流动抛物线分布 $w = 4 \times 10^8 U_0 y (10^{-4} - y)$, y 为纵坐标, U_0 为入口最大速度;出口为零通量。图 3 中,左边为入口,右边为出口,深灰色区域为悬臂梁结构,浅灰色区域为设计域,约束体积比设为 0.2,杨氏模量 $E_f = 10^{-9} E_s$, $E_s = 2 \times 10^{11}$ Pa,迭代次数为 180 次,在迭代过程中,初始值为 1 的投影参数 β 每迭代 20 次翻倍,均匀分布网格如图 4 所示。求解采用稳态 PARDISO 求解器,相对容差为 1×10^{-4} 。

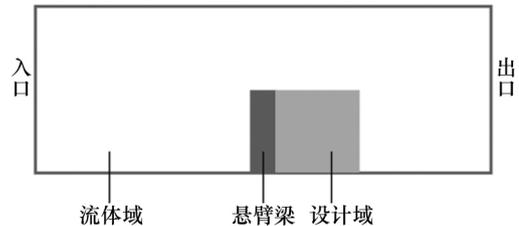


图3 二维悬臂梁流固耦合问题

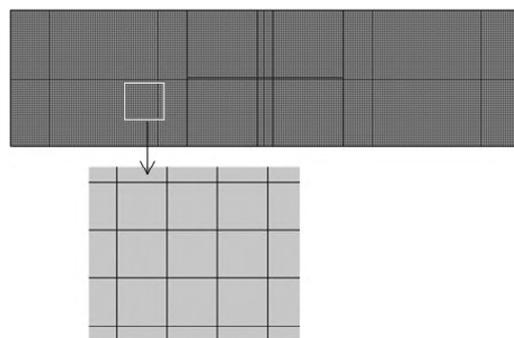


图4 均匀分布网格

雷诺数为 1 时设计变量的迭代演化过程和目标函数收敛曲线如图 5 所示。目标函数为柔顺度极小。

目标函数随迭代次数增加可以逐步稳定地收敛

到一个数值,并且体积分数满足约束体积比0.2,优化结构在严格满足体积约束的情况下,计算区域的柔顺度收敛于一局部值。二维悬臂梁支撑问题得到求解,从而说明本算例能够有效证明流固耦合整体公式模型在拓扑优化问题上的正确性和可行性。图6所示为雷诺数为1时的流速结果和压强结果,在流速结果中,经过悬臂梁上方时,由于通道变窄,流速变大,根据稳定流体的伯努利方程可知,流体流经悬臂梁上方时,在位能变化基本可以忽略的情况下,动能提高的结果必然会导致压力能降低。由于选用出口压强为参考面,所以出口压强为0。

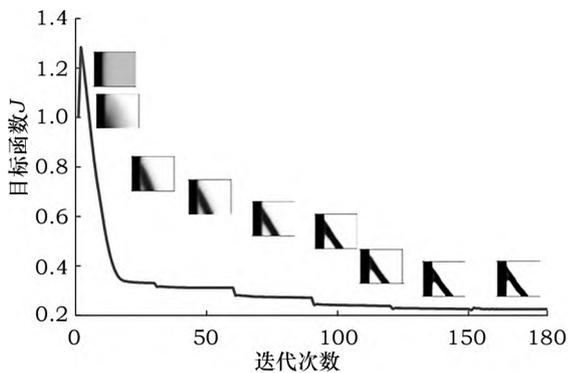


图5 设计变量的迭代演化过程和目标函数收敛曲线

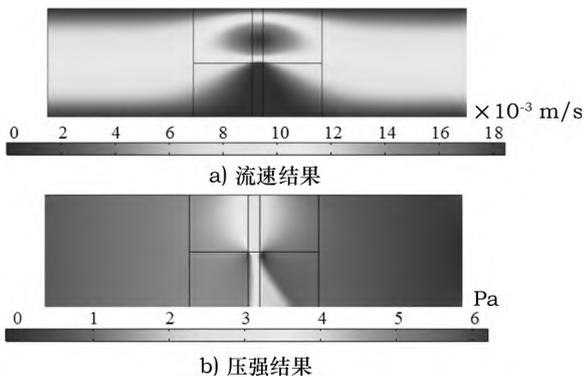


图6 雷诺数为1时的流速结果和压强结果

根据上述雷诺数为1的过程,重复1~500雷诺数情况下的拓扑优化结构设计,得到1~500雷诺数下对应的设计域拓扑结构和目标函数收敛值,如图7所示,拓扑结构清晰,因此此理论模型和拓扑优化计算程序可以解1~500雷诺数情况下的悬臂梁支撑结构拓扑优化问题。

3.2 二维受外力 F 的悬臂梁问题

本算例实现单入口单出口,并且有外力 F 作用的流固耦合设计域结构拓扑优化,雷诺数为10, F 范围为 $0 \sim 1 \times 10^4$ N,其入口速度初始值为 $w = 4 \times 10^8 U_0 y \times$

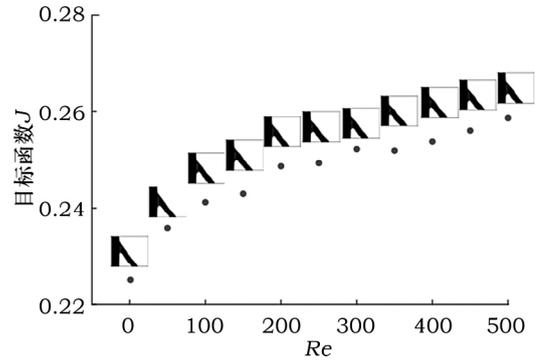


图7 1~500 雷诺数下对应的设计域拓扑结构和目标函数收敛值

($10^{-4} - y$),出口为零通量。二维悬臂梁受外力情况示意图如图8所示,左边为入口,右边为出口,深灰色区域为悬臂梁结构,浅灰色区域为设计域,外力作用在悬臂梁结构的右上角和流体域交点处,水平向右,约束体积比设为0.2,体积分数容差设置为 1×10^{-3} ,杨氏模量 $E_f = 10^{-6} E_s$, $E_s = 2 \times 10^{11}$ Pa,在迭代过程中,初始值为1的投影参数 β 每迭代30次翻倍,迭代次数为315次,在迭代过程中,同样采用均匀化网格分布。

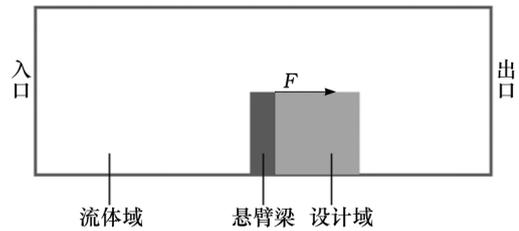


图8 二维悬臂梁受外力情况示意图

雷诺数为10, $F = 1 \times 10^2$ N设计变量迭代演化过程和目标函数收敛曲线如图9所示。

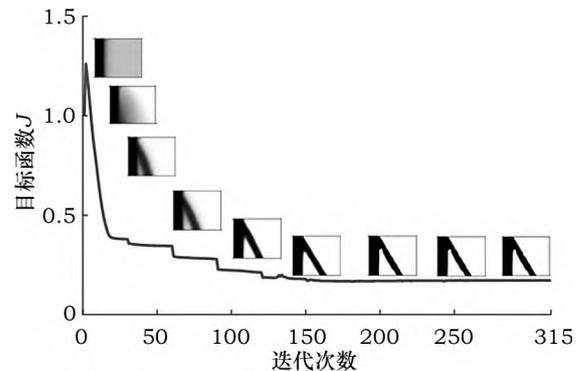


图9 雷诺数为10, $F = 1 \times 10^2$ N设计变量迭代演化过程和目标函数收敛曲线

和算例一类似,目标函数随迭代次数增加逐步稳定地收敛到一个数值,并且体积分数满足约束体积比0.2,从而说明建立的流固耦合拓扑优化模型能解决有外力

$F=1 \times 10^2 \text{ N}$ 作用下悬臂梁支撑结构拓扑优化问题。

雷诺数为 10, $F=1 \times 10^2 \text{ N}$ 时的流速结果和压强结果如图 10 所示。

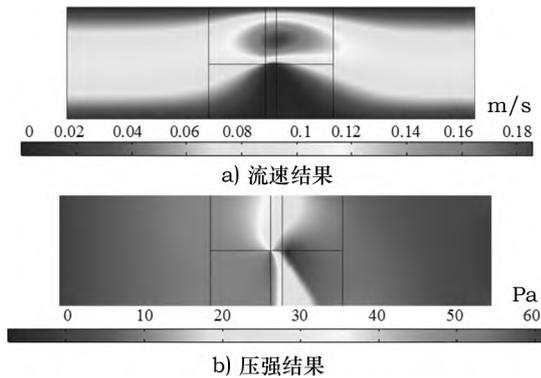


图 10 雷诺数为 10, $F=1 \times 10^2 \text{ N}$ 时的流速结果和压强结果

另外对 F 在范围 $0 \sim 1 \times 10^4 \text{ N}$ 的情况进行仿真, 同样可以得出稳定清晰的拓扑结构。悬臂梁在不同外力情况下支撑结构拓扑优化结果如图 11 所示, 列出了雷诺数为 10 情况下, $F=0, 1 \times 10^0, 1 \times 10^1, 1 \times 10^2, 1 \times 10^3, 1 \times 10^4 \text{ N}$ 共 6 种拓扑结构结果。各收敛曲线也如图 9 一样稳定收敛, 拓扑结构清晰。说明悬臂梁所受外力 $F=0 \sim 1 \times 10^4 \text{ N}$ 的情况下, 本理论模型可以对二维悬臂梁流固耦合问题进行拓扑优化求解。

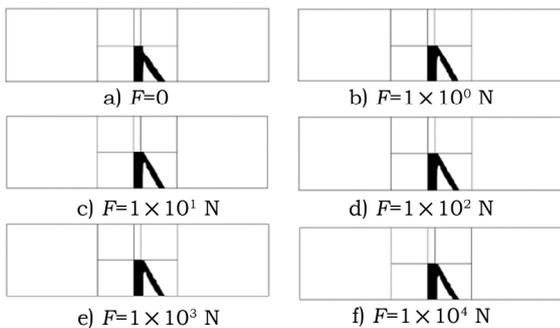


图 11 悬臂梁在不同外力情况下支撑结构拓扑优化结果

3.3 管道优化

本算例主要实现单入口单出口的流道支撑结构流固耦合设计域结构拓扑优化, 雷诺数为 $1 \sim 450$, 其入口速度为 $w = 4 \times 10^8 U_0 y (10^{-4} - y)$, 出口为零通量。二维管道双侧支撑示意图如图 12 所示, 左边为入口, 右边为出口, 灰色区域为设计域, 约束体积比设为 0.4, 体积分数容差设为 1×10^{-3} , 迭代次数为 315 次, 在迭代过程中, 初始值为 1 的投影参数 β 每迭代 20 次翻倍, 同样采用均匀化网格分布。

通过修改参数入口流速来达到改变雷诺数的目的, 在雷诺数 $1 \sim 450$ 的情况下进行优化仿真, 图 13 所

示为部分雷诺数情况下的管道支撑拓扑结构。本文通过修改流速来改变雷诺数 Re 大小, 即在不同流速下, 当流速大的时候, 结构左侧材料分布增多(图 13 中圈出的位置), 符合力学规律。二维管道的支撑结构拓扑在工程中的直接意义为在满足性能要求约束下最大限度节省材料, 尤其在航空航天领域应用中可以减轻重量。对于二维管道的结构拓扑优化结果也验证了本文所建立的整体模型理论方法的适用性。

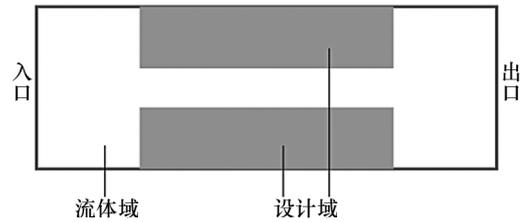


图 12 二维管道双侧支撑示意图

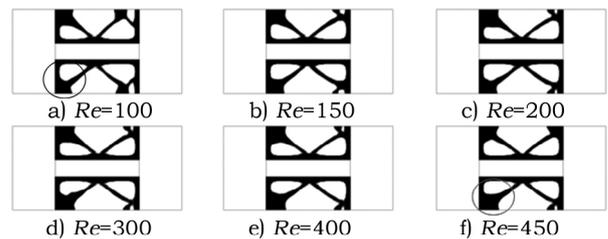


图 13 部分雷诺数情况下的管道支撑拓扑结构

4 结语

本文实现了定常流动、中低雷诺数($1 \sim 500$) 情况下的流固耦合整体模型拓扑优化的理论推导、数值实现和算例证明。创造性地建立了流固耦合问题拓扑优化的整体模型, 采用高渗透率多孔介质进行材质插值, 利用连续伴随分析方法获得伴随灵敏度, 进而求得拓扑结构。通过雷诺数 $1 \sim 500$ 的二维悬臂梁和二维管道流固耦合拓扑优化的算例, 验证了理论的正确性和可行性。为流固耦合的拓扑优化研究提供了理论基础和一种新的研究思路。对于高雷诺数、非定常流动流固耦合拓扑优化问题, 是未来流固耦合研究的攻坚方向。

参考文献:

- [1] SIGMUND O. Design of multiphysics actuators using topology optimization—Part I: one material structure [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190 (49/50): 6577-6604.
- [2] YAMAMOTO T, MARUYAMA S, NISHIWAKI S, et al. Topology design of multi-material soundproof structures in-

- cluding poroelastic media to minimize sound pressure levels [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009 ,198(17/18/19/20) : 1439-1455.
- [3] CHOI J ,YOO J. Structural optimization of ferromagnetic materials based on the magnetic reluctivity for magnetic field problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008 ,197(49/50) : 4193-4206.
- [4] CHENG K ,OLHOFF N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates [J]. *International Journal of Solids and Structures* ,1981 ,17: 305-323.
- [5] BENDSØE M ,SIGMUND O. *Topology optimization-theory methods and applications* [M]. Berlin: Springer 2003.
- [6] LUNDGARD C , ALEXANDERSEN J , ZHOU M , et al. Revisiting density-based topology optimization for fluid-structure-interaction problems [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2018 ,82: 969-995.
- [7] BEHROU R ,LAWRY M ,MAUTE K. Level set topology optimization of structural problems with interface cohesion [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2017 ,112: 990-1016.
- [8] DENG Y ,MAGER D ,BAI Y ,et al. Inversely designed micro-textures for robust Cassie-Baxter mode of super-hydrophobicity [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2018 ,341: 113-132.
- [9] DENG Y ,LIU Z ,WANG Y ,et al. Micro-textures inversely designed with overlaid-lithography manufacturability for wetting behavior in Cassie-Baxter status [J]. *Applied Mathematical Modelling* 2019 ,74: 621-640.
- [10] DENG Y ,ZHANG W ,LIU Z ,et al. Fiber bundle topology optimization of hierarchical microtextures for wetting behavior in Cassie-Baxter mode [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2020 ,61: 2523-2556.
- [11] YOON G. Topology optimization for stationary fluid-structure interaction problems using a new monolithic formulation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2010 ,82: 591-616.
- [12] BENDSØE M ,KIKUCHI N. Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 1988 ,71: 197-224.
- [13] BENDSØE M. Optimal shape design as a material distribution problem [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* ,1989 ,1(4) : 193-202.
- [14] ALLAIRE G ,JOUVE F ,TOADER A. A level-set method for shape optimization [J]. *Comptes Rendus Mathématique* , 2002 ,334(12) : 1125-1130.
- [15] XIE Y ,STEVEN G. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Computers & Structures* ,1993 , 49(5) : 885-896.
- [16] 王辉 程文明 翟守才 等. 基于 IPTO 算法的连续体结构可靠性拓扑优化 [J]. *现代制造工程* 2021(12) : 105-111.
- [17] 钱小辉 邓永波 刘永顺 等. 基于显式边界水平集方法流道优化设计 [J]. *中国机械工程* 2013 ,24(15) : 2097-2100 2113.
- [18] DENG Y ,ZHANG W ,LIU Z ,et al. Topology optimization for surface flows [J]. *Journal of Computational Physics* 2022 , 467: 111415.
- [19] DENG Y ,LIU Z ,ZHANG P ,et al. Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows [J]. *Journal of Computational Physics* 2011 ,230: 6688-6708.
- [20] DENG Y ,LIU Z ,WU J ,et al. Topology optimization of steady Navier-Stokes flow with body force [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ,2013 , 255: 306-321.
- [21] DENG Y ,LIU Z ,WU Y. Topology optimization of steady and unsteady incompressible Navier-Stokes flows driven by body forces [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* , 2013 ,47: 555-570.
- [22] DENG Y ,LIU Z ,WU Y. Topology optimization of capillary , two-phase flow problems [J]. *Communications in Computational Physics* 2017 ,22: 1413-1438.
- [23] KROG L ,OLHOFF N. Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ,1996 ,72: 535-563.
- [24] ANSOLA R ,CANALES J ,TARRAGO J ,et al. An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures [J]. *Computers & Structures* 2002 ,80: 449-458.
- [25] HASSANI B ,TAVAKKOLI S ,GHASEMNEJAD H. Simultaneous shape and topology optimization of shell structures [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* ,2013 , 48: 221-233.
- [26] DENG Y ,LIU Z ,KORVINK J. Topology optimization on two-dimensional manifolds [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2020 ,364: 112937.
- [27] WANG F ,LAZAROV B ,SIGMUND O. On projection methods ,convergence and robust formulations in topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization* , 2011 ,43: 767-784.
- [28] GUEST J ,PREVOST J ,BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004 ,61: 238-254.

(下转第 54 页)

- Robotics ,Intelligent Control and Artificial Intelligence. Shanghai: Association for Computing Machinery 2019: 77-82.
- [5] 张磊 孙斌 李红兵 等.一种具备多种抓取模式的三指机械手[J].现代制造工程 2019(12) : 49-54.
- [6] MO A ZHANG W Z.A universal robot gripper based on concentric arrays of rotating pins [J].Science China-Information Sciences 2019 62(5) : 1-3.
- [7] ZHENISHBEK Z ,FLORIAN H ,AUDE B ,et al.An origami-inspired reconfigurable suction gripper for picking objects with variable shape and size [J].IEEE Robotics and Automation Letters 2018 3(4) : 2894-2901.
- [8] ILIEVSKI F ,MAZZEO A D ,SHEPHERD R F ,et al.Soft robotics for chemists [J].Angewandte Chemie 2011 ,123(8) : 1930-1935.
- [9] 郭钟华 李小宁 林浩鹏.基于主动包络和负压塑形的软体适形夹持器[J].机械工程学报 2019 55(12) : 215-221.
- [10] LI G T ,XU P ,QIAO S L ,et al. Stability analysis and optimal enveloping grasp planning of a deployable robotic hand [J]. Mechanism and Machine Theory ,2021 ,158 (2021) : 104241.
- [11] NGUYEN V.The synthesis of force-closure grasps [J].Laboratory Massachusetts Institute of Technology ,1985 ,12 (6) : 36-39.
- [12] ROA M A ,SUAREZ R.Grasp quality measures: review and performance [J].Autonomous Robots 2015 38(1) : 65-88.
- [13] SALISBURY J K ,ROTH B.Analysis of multifingered hands [J].Robotics Research ,1986 4(4) : 3-17.
- [14] 王滨 李家炜 刘宏.机器人多指手的优化抓取力计算[J].吉林大学学报(工学版) 2008(1) : 178-182.
- [15] 邹俞 晁建刚 林万洪.基于力封闭的虚拟手稳定抓持力生成方法[J].计算力学学报 2019 36(4) : 548-554.
- [16] CHEONG J ,KRUGER H ,STAPPEN A F V D ,et al. Output-sensitive computation of force-closure grasps of a semi-algebraic object [J].IEEE Transactions on Automation Science and Engineering: A Publication of the IEEE Robotics and Automation Society 2011 8(3) : 495-505.
- [17] ROMANO J M ,HSIAO K ,NIEMEYER G ,et al.Human-inspired robotic grasp control with tactile sensing [J].IEEE Transactions on Robotics 2012 27(6) : 1067-1079.
- [18] KO C H ,CHEN J K.Grasping force based manipulation for multifingered hand-arm robot using neural networks [J]. Numerical Algebra Control and Optimization 2014 4(1) : 59-74.
- [19] 苏杰 张云洲 房立金 等.基于多重几何约束的未知物体抓取位姿估计[J].机器人 2020 42(2) : 129-138.

作者简介:曹现刚 博士 教授 博士生导师,主要研究方向为设备健康维护与管理、机器人技术。
黄世凯 通信作者,硕士研究生,主要研究方向为特种机器人设计与运动控制。

E-mail: caoxg@xust.edu.cn; hsk770643260@163.com

收稿日期: 2023-01-08

(上接第103页)

- [29] HINZE M ,PINNAU R ,ULBRICH M ,et al. Optimization with PDE constraints [M].Netherlands: Springer 2009.
- [30] DZIUK G ,ELLIOTT C.Finite element methods for surface PDEs [J].Acta Numerica 2013 22: 289-396.
- [31] ELMAN H ,SILVESTER D ,WATHEN A. Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics [M].New York: Oxford University Press 2006.
- [32] SVANBERG K.The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization [J].International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1987 24: 359-373.
- 作者简介:苗永壮 硕士研究生,主要研究方向为定常流动流固耦合拓扑优化。
邓永波 通信作者 研究员 博士研究生导师,主要研究方向为纳米光学拓扑优化与微纳制造技术。
- E-mail: miaoyongzhuang20@mails.ucas.ac.cn; dengyb@ciomp.ac.cn
- 收稿日期: 2023-03-23