DOI: 10.3969/j. issn. 1001-3881. 2022. 09. 001
本文引用格式: 毛嘉炜,贺帅,刘昌儒,等.空间机械臂在轨刚度计算与验证[J].机床与液压,2022,50(9):1-6.
MAO Jiawei,HE Shuai,LIU Changru,et al.Calculation and verification of on-orbit stiffness of space manipulator[J]. Machine Tool & Hydraulics,2022,50(9):1-6.

空间机械臂在轨刚度计算与验证

毛嘉炜[1,2,3],贺帅[1,3],刘昌儒[1,3],吴清文[1,3,4],徐振邦[1,3,4],谢宗武[5],母德强[6]

(1. 中国科学院,长春光学精密机械与物理研究所,吉林长春 130033; 2. 中国科学院大学,北京 100049; 3. 中国科学院,空间光学系统在轨制造与集成重点实验室,吉林长春 130033; 4. 中国科学院大学材料与光电研究中心,北京 100049; 5. 哈尔滨工业大学机电工程学院,黑龙江哈尔滨 150001; 6. 长春工业大学机电工程学院,吉林长春 130012)

摘要: 空间机械臂在执行空间任务时具有不同的构型,采用有限元法分析它在各构型下的基频时工作量巨大而难以实现。为此,提出一种基于柔度矩阵理论建模的计算方法并进行验证。根据机械臂结构特性建立运动学模型;提出柔度矩阵理论建模的计算方法;通过有限元仿真分析机械臂 2 种典型构型,验证柔度矩阵理论;对机械臂进行地面展开基频实验。结果表明:柔度矩阵计算偏差为 3.4%,理论分析基频与有限元计算基频偏差为 1%,验证了所提出的柔度理论建模方法对机械臂在轨基频计算的准确性;理论分析基频与实验基频偏差为 7.2%,偏差主要来源于有限元仿真,满足工程上 10%的偏差要求。该方法将柔度矩阵与机械臂构型相结合,能快速计算机械臂在不同构型下的基频。相对于有限元法,该方法得到较大简化,具有一定的工程应用价值。

关键词: 机械臂;在轨刚度;构型;柔度矩阵;基频;有限元仿真
中图分类号: TP242.2

Calculation and Verification of On-orbit Stiffness of Space Manipulator

MAO Jiawei[1,2,3], HE Shuai[1,3], LIU Changru[1,3], WU Qingwen[1,3,4], XU Zhenbang[1,3,4], XIE Zongwu[5], MU Deqiang[6]

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun Jilin 130033, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. CAS Key Laboratory of On-orbit Manufacturing and Integration for Space Optics System, Chinese Academy of Sciences, Changchun Jilin 130033, China; 4. Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 5. School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China; 6. School of Mechatronics Engineering, Changchun University of Technology, Changchun Jilin 130012, China)

Abstract: Space manipulator has different configurations when performing space tasks, so it is difficult to realize the fundamental frequency of space manipulator under different configurations by using finite element analysis. Therefore, a calculation method based on flexibility matrix theory modeling was proposed and verified. The kinematics model was established according to the structural characteristics of the manipulator; the calculation method of the flexibility matrix theoretical modeling was proposed; the flexibility matrix theory was verified through the finite element analysis of the manipulator under two typical configurations; the ground-based fundamental frequency experiment for the manipulator was verified. The results show that the flexibility matrix calculation deviation is 3.4%, and the deviation between the theoretical analysis fundamental frequency and the finite element calculation fundamental frequency is 1%, indicating that the flexibility theoretical modeling method proposed is accurate to the fundamental frequency calculation of the mechanical arm in orbit; the deviation between the theoretical analysis fundamental frequency and the experimental fundamental frequency is 7.2%, the deviation mainly comes from the finite element simulation, which meets the engineering requirement of 10% deviation range. In this method, the flexibility matrix is combined with the manipulator configuration, the fundamental frequency of the

收稿日期: 2021-03-09
基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11972343)
作者简介: 毛嘉炜(1997—),男,硕士研究生,研究方向为机器人动力学、轨迹规划。E-mail:1737569764@qq.com。
通信作者: 贺帅(1989—),男,硕士,副研究员,主要研究方向为力学分析。E-mail:652740868@qq.com。

manipulator in different configurations can be calculated quickly. Compared with the finite element method, the proposed method is greatly simplified and has some engineering application value.

Keywords: Manipulator; On - orbit stiffness; Configuration; Flexibility matrix; Fundamental frequency; Finite element simulation

0　前言

随着科学技术的不断发展，各国在太空层面进行了进一步探索。但是太空环境有着微重力、高真空、高寒、大温差、强辐射的特性，阻碍了对太空的进一步探索，尤其是载人航天工程[1-3]。在恶劣的空间环境下，人类许多空间活动很难完成，因此空间机械臂的研究成为太空探索的重要基础。自 1981 年哥伦比亚号航天飞机在太空中首次采用机械臂以来，国际空间站（ISS）的加拿大臂（CANADARM2）、欧洲臂（ERA）、日本臂（JEMRMS）等在外太空操作中起到了非常重要的作用[4-10]。随科技的进步，对于空间机械臂技术的需求越来越迫切，而且对其工作能力和性能、可靠性、安全性、寿命等方面也提出了越来越高的要求。

空间机械臂是一个机、电、热、控一体化集成系统，建立准确的运动学、动力学模型和相关的仿真分析、实验验证是实现机械臂功能的保障[11-14]。机械臂在轨状态要保证相应的控制性能与运动精度，也要求确保机械臂的结构刚度。其刚度特性是影响整体运动学的主要因素，为此对其在轨刚度进行准确模拟分析[15-16]。目前，国内对于空间机械臂刚度的分析方法和实验方法研究较少，也少有学者将柔度矩阵建模与机械臂构型相结合，国外的相关资料也有限。MUSSA-IVADI 和 HOGAN[17-18] 给出了冗余度串联机械臂的柔度矩阵和刚度矩阵。DIMENTBERG[19] 第一次运用旋量理论求出刚体在平衡位置的刚度矩阵。赵朋飞[20] 针对已有刚度矩阵算法进行重构与优化，但是该研究只是对串联机械臂末端工具的刚度进行了分析。陈少帅[21] 对谐波传动引起的刚度变化进行分析。上述研究只考虑了谐波减速器与力矩传感器等具有明显柔性特征的部件的柔度，而忽略了其他部件的柔度。而空间机械臂具有高轻量化的特点，其他部件的柔度会引起更大的误差，不能忽略，可以采用有限元分析的方法计算机械臂的整体柔度。

采用有限元计算机械臂在一种构型下的柔度时，需要在有限元软件中旋转 7 个关节并重新进行连接和计算，该过程约耗时 4 h。而机械臂实际工作时的构型有无穷多种，采用有限元分析对各个构型进行建模与分析工作量巨大且不切实际。因此，应采用新的方法分析机械臂在不同姿态下的柔度。

针对上述情况，本文作者提出一种将经典柔度理论与经典机器人运动学理论相结合的计算方法，计算机械臂在各个位姿下的整体柔度矩阵，并据此预估机械臂抓取载荷的基频。该方法充分考虑机械臂各部件的柔度影响，其理论分析与有限元分析计算的柔度偏差为 3.4%、基频偏差为 1%，说明了其理论计算方法的准确性。利用该方法可将计算机械臂在一种构型下的柔度矩阵的时间由 4 h 减小到 10 ms，大大提高计算效率。

1　机械臂运动学建模

文中的研究对象是一个七自由度的空间机械臂，由 2 个臂杆、7 个关节、2 个末端执行器、2 台手眼相机、2 台肘部相机组成。机械臂零位构型如图 1 所示，其零位时的坐标系如图 2 所示。基座坐标系{0}的原点位于基座末端作用器端面中心点，z 轴方向垂直于相机。末端坐标系的原点位于末端作用器端面中心点，z 轴方向垂直于相机。相应的 D-H 参数见表 1，则末端相对基座的齐次变换矩阵[22]为

$$ {}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1} $$

其中：

$$ {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta_i & -\mathrm{s}\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \mathrm{s}\theta_i \mathrm{c}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\theta_i \mathrm{c}\alpha_{i-1} & -\mathrm{s}\alpha_{i-1} & -\mathrm{s}\alpha_{i-1} d_i \\ \mathrm{s}\theta_i \mathrm{s}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\theta_i \mathrm{s}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2} $$

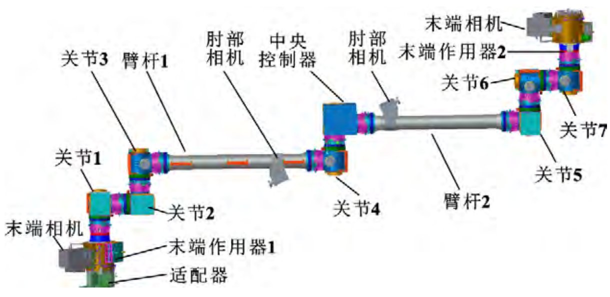


图 1　空间机械臂零位构型

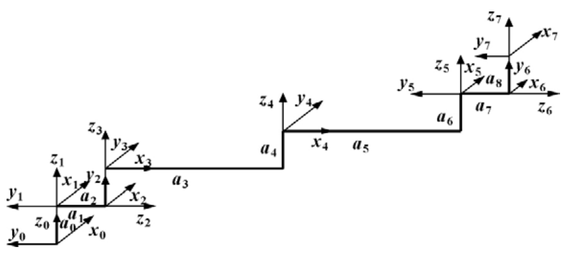


图 2　空间机械臂零位构型坐标系

表 1　机械臂 D-H 参数

i	α_{i-1} /(°)	a_{i-1} /m	d_i /m	θ_i /(°)
1	0	0	a_0	θ_1
2	90	0	a_1	θ_2
3	-90	0	a_2	θ_3-90
4	0	a_3	a_4	θ_4
5	0	a_5	a_6	θ_5 + 90
6	90	0	a_7	θ_6
7	- 90	0	a_8	θ_7

机器人的正运动学即给定关节转动角度求解末端位姿(角度采用欧拉角 321 表示)。将各关节角度代入式(1)可以求得齐次变换矩阵，则相应的末端位姿为

$$x = r_{14} \quad y = r_{24} \quad z = r_{34} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\beta = \arctan2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \alpha = \arctan2(r_{21}, r_{11}) \\ \gamma = \arctan2(r_{32}, r_{33})\end{cases} \tag{4}$$

当 $\beta = \pm 90°$时

$$\begin{cases}\alpha = \arctan2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta) \\ \gamma = \arctan2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)\end{cases} \tag{5}$$

当 $\beta = 90°$ 时

$$\alpha = 0, \gamma = \arctan2(r_{12}, r_{22}) \tag{6}$$

当 $\beta = -90°$ 时

$$\alpha = 0, \gamma = -\arctan2(r_{12}, r_{22}) \tag{7}$$

2　柔度理论建模

2.1　单元柔度矩阵变换

设图 3 中单元 AB 中点 B 相对点 A 在坐标系{1}下的柔度矩阵为${}^1\boldsymbol{C}_B^A$，则 A、B 两点位移与点 B 受到的力在坐标系{1}下的关系为

$${}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - {}^1\boldsymbol{J}_A^{B\,1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A = {}^1\boldsymbol{C}_B^{A\,1}\boldsymbol{F}_B \tag{8}$$

其中:

$$\boldsymbol{J}_A^B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{M} \\ 0 & \boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}0 & z_B - z_A & y_A - y_B \\ z_A - z_B & 0 & x_B - x_A \\ y_B - y_A & x_A - x_B & 0\end{bmatrix} \tag{10}$$

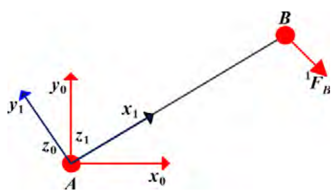


图 3　单元柔度矩阵变换

定义矩阵 $\boldsymbol{S}_A^B$，表示串联连杆连接处的过渡矩阵，公式为

$$\boldsymbol{S}_A^B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & 0 \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{cases}(\boldsymbol{S}_A^B)^{-1} = \boldsymbol{S}_B^A \\ \boldsymbol{J}_A^B = (\boldsymbol{S}_B^A)^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{12}$$

点 B 受到的力在坐标系{0}下与在坐标系{1}下关系式为

$${}^0\boldsymbol{F}_B = {}^0_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\boldsymbol{F}_B \tag{13}$$

$${}^0_1\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}{}^0_1\boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & {}^0_1\boldsymbol{R}\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中: ${}^0_1\boldsymbol{R}$ 为坐标系{1}相对坐标系{0}的旋转变换矩阵。

则:

$${}^0\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - {}^0\boldsymbol{J}_A^{B\,0}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A = {}^0_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - {}^0\boldsymbol{J}_A^{B\,0}{}_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A = {}^0_1\boldsymbol{Q}({}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - {}^1_0\boldsymbol{Q}\,{}^0\boldsymbol{J}_A^{B\,0}{}_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A) \tag{15}$$

对应图中单元 AB，点 A 受到的力向点 B 等效时，在坐标系{1}下的描述为

$${}^1\boldsymbol{S}_A^{B\,1}\boldsymbol{F}_A = {}^1_0\boldsymbol{Q}\,{}^0\boldsymbol{S}_A^{B\,0}{}_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\boldsymbol{F}_A \tag{16}$$

则:

$${}^1\boldsymbol{S}_A^B = {}^1_0\boldsymbol{Q}\,{}^0\boldsymbol{S}_A^{B\,1}{}_0\boldsymbol{Q} \tag{17}$$

$${}^0\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{J}_A^{B\,0}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A = {}^0_1\boldsymbol{Q}({}^1\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - {}^1\boldsymbol{J}_A^{B\,1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A) = {}^0_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\boldsymbol{C}_B^{A\,1}\boldsymbol{F}_B = {}^0_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\boldsymbol{C}_B^{A\,1}{}_0\boldsymbol{Q}\,{}^0\boldsymbol{F}_B \tag{18}$$

从而推导出单元 AB 在坐标系{0}下的柔度矩阵与在坐标系{1}下的柔度矩阵的关系为

$${}^0\boldsymbol{C}_B^A = {}^0_1\boldsymbol{Q}\,{}^1\boldsymbol{C}_B^{A\,1}{}_0\boldsymbol{Q} \tag{19}$$

2.2　单元柔度矩阵

对于图 4 中的单元 BC，点 C 相对点 B 的柔度矩阵为${}^0\boldsymbol{C}_C^B$，单元 BC 在点 B 受到单元 AB 的力为

$$\boldsymbol{F}_B^{AB} = -\boldsymbol{S}_C^B\boldsymbol{F}_C \tag{20}$$

则有:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C - \boldsymbol{J}_B^C\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{F}_C = -\boldsymbol{C}_C^B(\boldsymbol{S}_C^B)^{-1}\boldsymbol{F}_B^{AB} \tag{21}$$

两边同时乘以$-\boldsymbol{J}_C^B$ 有:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{J}_C^B\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C = \boldsymbol{J}_C^B\boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{S}_B^C\boldsymbol{F}_B^{AB} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{C}_B^C = \boldsymbol{J}_C^B\boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{S}_B^C = (\boldsymbol{S}_B^C)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{S}_B^C \tag{23}$$

图 4　单元柔度矩阵模型

2.3　串联单元柔度矩阵

图 5 中各单元的柔度矩阵在世界坐标系{0}下，单元 AB 的柔度矩阵为${}^0\boldsymbol{C}_B^A$，单元 BC 的柔度矩阵为${}^0\boldsymbol{C}_C^B$。设点 C 受到的外力为${}^0\boldsymbol{F}_C$，则单元 AB 在点 B 受到单元 BC 的力${}^0\boldsymbol{F}_B$ 为

$${}^0\boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{S}_C^B\boldsymbol{F}_C \tag{24}$$

其中:

$$\boldsymbol{S}_C^B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & 0 \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{25}$$

$$N=\begin{bmatrix} 0 & z_B-z_C & y_C-y_B \\ z_C-z_B & 0 & x_B-x_C \\ y_B-y_C & x_C-x_B & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{J}_A^B\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A=\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{F}_B=\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{S}_C^B\boldsymbol{F}_C \tag{27}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C-\boldsymbol{J}_B^C\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{F}_C \tag{28}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C-\boldsymbol{J}_B^C\mathrm{d}\boldsymbol{x}_B=\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C-\boldsymbol{J}_B^C(\boldsymbol{J}_A^B\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{S}_C^B\boldsymbol{F}_C)=\boldsymbol{C}_C^B\boldsymbol{F}_C \tag{29}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_C-\boldsymbol{J}_A^C\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A=(\boldsymbol{J}_B^C\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{S}_C^B+\boldsymbol{C}_C^B)\boldsymbol{F}_C=[(\boldsymbol{S}_C^B)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{S}_C^B+\boldsymbol{C}_C^B]\boldsymbol{F}_C \tag{30}$$

所以串联后点 C 相对点 A 的柔度矩阵为

$$\boldsymbol{C}_C^A=(\boldsymbol{S}_C^B)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_B^A\boldsymbol{S}_C^B+\boldsymbol{C}_C^B \tag{31}$$

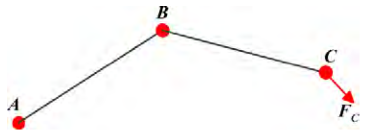


图 5　单元串联模型

2.4　镜像单元柔度矩阵

对于单元 BC，点 C 相对点 B 的柔度矩阵为 ${}^0\boldsymbol{C}_C^B$，如图 6 所示，镜像单元 B_1C_1 的坐标系中的 x_1 轴和 z_1 轴与单元的相对位置关系与原始单元 BC 一致，而 y_1 轴则相反。因此，镜像单元 B_1C_1 在坐标系 $x_1y_1z_1$ 下的柔度矩阵与原始单元 BC 在 xyz 下的柔度矩阵的关系为

$${}^1\boldsymbol{C}_{C1}^{B1}={}^0\boldsymbol{C}_C^B\times\boldsymbol{S} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

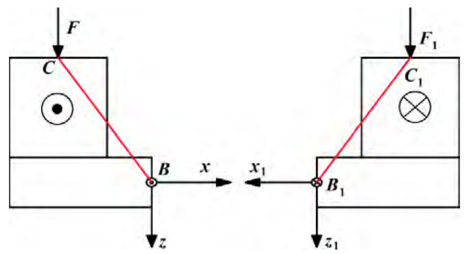


图 6　镜像单元模型

2.5　整机柔度矩阵

将 i 个连杆的柔度矩阵串联，得到整机柔度矩阵。将相对连杆坐标系的柔度矩阵转换到世界坐标系下，得到转换后的柔度矩阵：

$${}^0\boldsymbol{C}_B^A={}^0_i\boldsymbol{Q}\,{}^i\boldsymbol{C}_{B0}^{Ai}\boldsymbol{Q}\qquad i=1,2,\cdots,7 \tag{34}$$

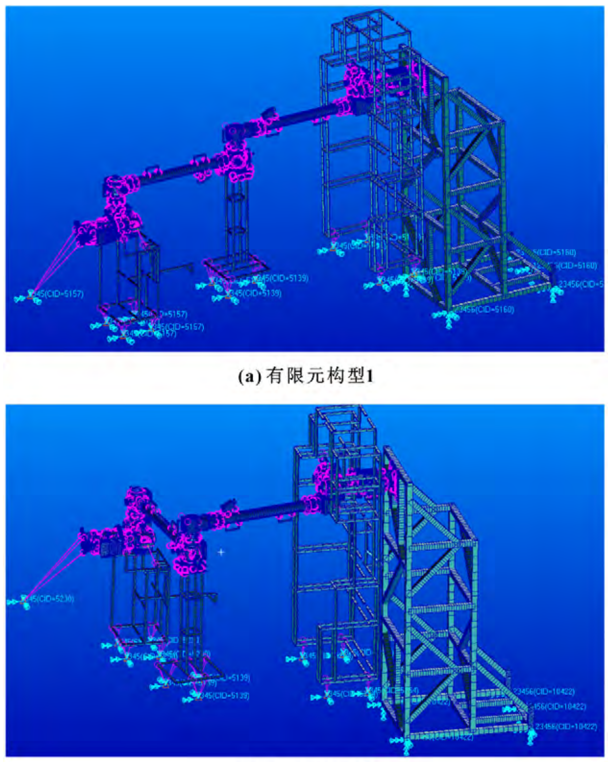
利用串联柔度矩阵公式 (31)，依次求得前 i 个连杆串联后的柔度矩阵：

$$\boldsymbol{C}_i^0=(\boldsymbol{S}_i^{i-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{i-1}^o\boldsymbol{S}_i^{i-1}+\boldsymbol{C}_i^{i-1}\qquad i>1 \tag{35}$$

3　机械臂刚度理论模型与实验对比

3.1　刚度矩阵理论验证

在轨工作状态时，机械臂需要抓取 3 t 货物。为满足机械臂的控制需求，需要分析其不同构型下抓取 3 t 物体的基频。因此，为验证柔度矩阵理论模型的准确性，对机械臂 2 种构型进行有限元分析，对应有限元模型如图 7 所示，其构型参数见表 2。采用柔度矩阵算法与有限元分析分别计算 2 种构型下的柔度矩阵，结果如表 3 所示。可知，主对角值最大偏差为 3.4%，该偏差主要来源于有限元 D-H 参数与理论 D-H的参数偏差。同时，非对角线参数存在较大的偏差，是由于主对角线参数比其他项参数大几个数量级，矩阵运算时主对角线参数与非主对角线参数耦合导致的。



(a) 有限元构型1

(b) 有限元构型2

图 7　机械臂测试状态下模型

表 2　机械臂 2 种构型下的关节角度　单位：(°)

构型	关节 1	关节 2	关节 3	关节 4	关节 5	关节 6	关节 7
1	90	−90	−90	0	−90	−90	−90
2	90	−90	−172	93	−101	−90	−90

表 3　机械臂连杆柔度矩阵

方法	(F_x,F_y,F_z)/N，(M_x,M_y,M_z)/(N·m)	平动位移/m			转动位移/rad		
		x 方向	y 方向	z 方向	x 方向	y 方向	z 方向
文中算法	(1 0 0 0 0 0)	2.18×10^{-3}	2.74×10^{-6}	1.00×10^{-6}	3.02×10^{-6}	3.98×10^{-6}	-1.23×10^{-6}
	(0 1 0 0 0 0)	2.74×10^{-6}	1.74×10^{-3}	-8.04×10^{-6}	-3.47×10^{-6}	-1.83×10^{-6}	-6.82×10^{-6}
	(0 0 1 0 0 0)	1.00×10^{-6}	-8.04×10^{-6}	4.14×10^{-4}	1.86×10^{-6}	2.54×10^{-6}	-1.21×10^{-6}
	(0 0 0 1 0 0)	3.02×10^{-6}	-3.47×10^{-6}	1.86×10^{-6}	9.12×10^{-4}	5.32×10^{-6}	-2.22×10^{-6}
	(0 0 0 0 1 0)	3.98×10^{-6}	-1.83×10^{-6}	2.54×10^{-6}	5.32×10^{-6}	1.04×10^{-3}	-1.44×10^{-6}
	(0 0 0 0 0 1)	-1.23×10^{-6}	-6.82×10^{-6}	-1.21×10^{-6}	-2.22×10^{-6}	-1.44×10^{-6}	5.89×10^{-4}
有限元法	(1 0 0 0 0 0)	2.18×10^{-3}	2.33×10^{-6}	9.53×10^{-6}	-5.42×10^{-6}	4.00×10^{-6}	-1.23×10^{-6}
	(0 1 0 0 0 0)	2.33×10^{-6}	1.71×10^{-3}	-7.92×10^{-6}	-3.44×10^{-6}	1.78×10^{-6}	-8.73×10^{-6}
	(0 0 1 0 0 0)	9.53×10^{-6}	-7.92×10^{-6}	4.01×10^{-4}	1.81×10^{-6}	2.40×10^{-6}	-1.17×10^{-6}
	(0 0 0 1 0 0)	-5.42×10^{-6}	-3.44×10^{-6}	1.81×10^{-6}	9.13×10^{-4}	-7.73×10^{-6}	-3.55×10^{-6}
	(0 0 0 0 1 0)	4.00×10^{-6}	1.78×10^{-6}	2.40×10^{-6}	-7.73×10^{-6}	1.07×10^{-3}	-1.15×10^{-6}
	(0 0 0 0 0 1)	-1.23×10^{-6}	-8.73×10^{-6}	-1.17×10^{-6}	-3.55×10^{-6}	-1.15×10^{-6}	5.95×10^{-4}

采用柔度矩阵理论模型进行在轨基频分析时，机械臂的质量难以精确，为此需要对机械臂质量进行相关等效分析。由于机械臂负载较大，机械臂自身质量特性对在轨基频的影响相对较小，将机械臂质量的 1/2 等效到末端负载上。下面是对该等效方法的偏差估计。

单自由度弹簧固有频率 $\omega=\sqrt{k/m}$，不考虑机械臂质量的基频为 $\omega_1=\sqrt{k/m_2}$，将 1/2 的机械臂质量等效到末端的基频为 $\omega_0=\sqrt{k/(0.5m_1+m_2)}$，将机械臂所有质量等效到末端的基频为 $\omega_2=\sqrt{k/(m_1+m_2)}$，其中：$m_1$ 为机械臂质量 400 kg；m_2 为末端负载质量 3 000 kg。

则：

$$\sqrt{k/(m_1+m_2)}<\omega_0=\sqrt{k/(0.5m_1+m_2)}<\sqrt{k/m_2} \tag{36}$$

$$\sqrt{k/m_2}/\sqrt{k/(0.5m_1+m_2)}=1.033 \tag{37}$$

$$\sqrt{k/(0.5m_1+m_2)}/\sqrt{k/(m_1+m_2)}=1.031 \tag{38}$$

因此，将机械臂质量的 1/2 等效到末端负载上的偏差可控制在 3%左右，由于此计算方法考虑的是单自由度频率，而实际机械臂采用多自由度柔度矩阵，计算结果会存在一定差异。选取表中 2 个典型构型进行理论计算与有限元分析，结果如表 4 所示。可知理论计算结果与有限元分析结果最大比值为 1.01，产生该偏差的主要原因：（1）理论分析时机械臂质量等效到负载上时存在一定误差；（2）有限元中的 D-H 参数与机械臂实际的 D-H 参数存在一定偏差。

表 4　机械臂基频分析结果

构型	基频/Hz		计算值与仿真值之比
	有限元仿真结果	计算结果	
1	0.062 18	0.062 8	1.009 9
2	0.083 322	0.083 2	0.998 5

3.2　实验验证

为得到柔度矩阵理论模型与实验测试结果的偏差以验证此计算方法的准确性，对机械臂 2 种构型进行测试，其构型参数同表 2。

基频测试时将机械臂一端固定在模拟墙上，机械臂各主要单元由气浮工装实现重力卸载，在负载上施加一定的力使机械臂偏离平衡位置，同时用激光跟踪仪记录机械臂末端位移。

实验时增加了气浮工装的质量、气浮桁架的刚度等因素，因为模拟墙的质量与刚度偏低，导致得到的基频结果也偏低。通过测试实验得到的结果如表 5 所示。机械臂抓取物体时的柔度理论模型计算结果比实验测试结果偏高，柔度理论模型计算结果与测试结果之比为 1.071 8，故柔度矩阵算法计算的基频与实验结果的偏差为 7.2%，说明利用该算法能够较准确地计算机械臂的在轨基频。

表 5　模拟墙测试状态下基频分析结果

构型	基频/Hz		理论计算结果与实验结果比值
	实验结果	理论计算结果	
1	0.058 59	0.062 6	1.071 8
2	0.078 13	0.083 2	1.064 9

4　结论

本文作者提出一种基于柔度理论建模的计算方法，相较于常见柔度矩阵只考虑关节处柔度的分析方法，文中柔度矩阵理论方法考虑了机械臂各连杆中主要零件的柔性，并根据连杆柔度矩阵计算机械臂各个位姿下的整体柔度矩阵，然后将机械臂整体柔度矩阵用于机械臂的在轨基频预估。柔度矩阵偏差为 3.4%，理论分析基频与有限元计算基频偏差为 1%，验证了所提出的柔度理论建模方法对机械臂在轨基频计算的准确性。而理论分析基频与实验基频偏差为 7.2%，偏差主要来源于有限元仿真，但满足工程上

10%的偏差要求。相对于在采用有限元计算在轨基频时需要建立各种构型，柔度理论算法将柔度矩阵与机械臂构型相结合，能快速计算机械臂在不同构型下的基频，具有工程应用价值。

参考文献:

[1] 张文辉，叶晓平，季晓明，等.国内外空间机器人技术发展综述[J].飞行力学，2013，31(3)：198-202.
ZHANG W H，YE X P，JI X M，et al.Development summarizing of space robot technology national and outside[J].Flight Dynamics，2013，31(3)：198-202.

[2] KING D.Space servicing：past，present and future[C]//Proceedings of the 6th International Symposium on Artificial Intelligence，Robot and Automation in Space.Montreal，Canada，2001：346-351.

[3] BEJCZY A K，VENKATARAMAN S T.Introduction to the special issue on space robotics[J].IEEE Transactions on Robotics and Automation，1993，9(5)：521-523.

[4] 丹宁.加拿大为国际空间站建造机械臂[J].中国航天，1998(4)：26-28.

[5] LARYSSA P，LINDSAY E，LAYI O，et al.International space station robotics：a comparative study of ERA，JEMRMS and MSS[C]//Proceedings of 7th ESA Workshop on Advanced Space Technologies for Robotics and Automation.Noordwijk，Netherlands，2002，19-21.

[6] MATSUEDA T，KURAOKA K，GOMA K，et al.JEMRMS system design and development status[C]//Proceedings of National Telesystems Conference.Atlanta，USA：IEEE，1991：391-395.

[7] SACHDEV S，HARVEY W，GIBBS G，et al.Canada and the international space station program：overview and status since IAC 2005[C]//Proceedings of 57th International Astronautical Congress.Reston，Virigina：AIAA，2006.

[8] 刘宏，蒋再男，刘业超.空间机械臂技术发展综述[J].载人航天，2015，21(5)：435-443.
LIU H，JIANG Z N，LIU Y C.Review of space manipulator technology[J].Manned Spaceflight，2015，21(5)：435-443.

[9] 张凯锋，周晖，温庆平，等.空间站机械臂研究[J].空间科学学报，2010，30(6)：612-619.
ZHANG K F，ZHOU H，WEN Q P，et al.Review of the development of robotic manipulator for international space station[J].Chinese Journal of Space Science，2010，30(6)：612-619.

[10] 田士涛，吴清文，贺帅，等.空间机械臂锁紧机构等效线性化分析及验证[J].光学精密工程，2016，24(3)：590-599.
TIAN S T，WU Q W，HE S，et al.Linear analysis and practical tests of fixation mechanisms in space robotic arm[J].Optics and Precision Engineering，2016，24(3)：590-599.

[11] 于登云，孙京，马兴瑞.空间机械臂技术及发展建议[J].航天器工程，2007，16(4)：1-8.
YU D Y，SUN J，MA X R.Suggestion on development of Chinese space manipulator technology[J].Spacecraft Engineering，2007，16(4)：1-8.

[12] 何俊培，徐振邦，于阳，等.九自由度超冗余机械臂的设计和测试[J].光学精密工程，2017，25(12)：80-86.
HE J P，XU Z B，YU Y，et al.Design and experimental testing of a 9-DOF hyper-redundant robotic arm[J].Optics and Precision Engineering Simulation，2017，25(12)：80-86.

[13] 何鹏.空间柔性机械臂在轨抓取动力学及振动特性分析[D].哈尔滨：哈尔滨工业大学，2019.
HE P.Analysis of in-orbit grasping dynamics and vibration characteristics of space flexible manipulator[D].Harbin：Harbin Institute of Technology，2019.

[14] 朱超，孔旭，胡成威，等.空间机械臂维修性系统设计与评价体系的构建[J].航空学报，2021，42(1)：524002.
ZHU C，KONG X，HU C W，et al.Maintainability system design and evaluation system constucton for space manipulators[J].Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2021，42(1)：524002.

[15] 吴星宇.空间机械臂变刚度关节及柔顺控制研究[D].北京：北京邮电大学，2018.
WU X Y.Research on variable stiffness joint and compliance control of space manipulator[D].Beijing：Beijing University of Posts and Telecommunications，2018.

[16] 贾宏亮，姚琼，黄强.基于质量分配的空间机械臂刚度优化[J].中国空间科学技术，2008，28(3)：45-52.
JIA H L，YAO Q，HUANG Q.Stiffness optimization of space manipulator based on mass allocation[J].Chinese Space Science and Technology，2008，28(3)：45-52.

[17] MUSSA-IVADI F A，HOGAN N.Solving kinematic redundancy with impedance control：a class of integrable pseudoinverses[C]//Proceedings of 1989 International Conference on Robotics and Automation.Scottsdale，USA：IEEE，1989：283-288.

[18] MUSSA-IVALDI F A，HOGAN N.Integrable solutions of kinematic redundancy via impedance control[J].The International Journal of Robotics Research，1991，10(5)：481-491.

[19] DIMENTBERG F M.The screw calculus and its applications in mechanics[Z].Technology Div Wright Patterson AFB Oh，1968.

[20] 赵朋飞.串联机械臂的静态空间刚度算法和构造研究[D].广州：华南理工大学，2018.
ZHAO P F.Research on calculation algorithm and construction of static space stiffness of serial robot[D].Guangzhou：South China University of Technology，2018.

[21] 陈少帅.空间机械臂关节中谐波减速器的研制[D].哈尔滨：哈尔滨工业大学，2014.
CHEN S S.Design of harmonic reducer used in joints for space manipulator[D].Harbin：Harbin Institute of Technology，2014.

[22] 由弘扬，贺帅，刘宏伟，等.基于bi_RT算法的九自由度机械臂路径规划[J].计算机仿真，2019，36(7)：308-313.
YOU H Y，HE S，LIU H W，et al.The mechanical arm of 9-dof path planning based on bi_RT algorithm[J].Computer Simulation，2019，36(7)：308-313.

(责任编辑：张楠)