DOI：10.16579/j.issn.1001.9669.2022.01.012

高维 Copula 函数的动态系统可靠性模型研究*

RESEARCH ON DYNAMIC SYSTEM RELIABILITY MODEL OF HIGH DIMENSIONAL COPULA FUNCTION

冯　钧[**1,2]　刘　伟[***1]　谭　龙[1]　李　颐[1]

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所，长春 130033)

(2. 中国科学院大学，北京 100049)

FENG Jun[1,2]　LIU Wei[1]　TAN Long[1]　LI Yi[1]

(1. *Changchun Institute of Optics，Fine Mechanics and Physics，Chinese Academy of Sciences，Changchun* 130033，*China*)

(2. *University of Chinese Academy of Sciences，Beijing* 100049，*China*)

摘要　针对多失效相关的动态机械系统，利用 Copula 函数描述各单元之间失效模式的相关性，提出了一种具有多失效相关的动态机械系统可靠性模型，采用 R-Vine Copula 函数将复杂系统的可靠性问题转化为多个二维 Pair Copula 函数进行分析，利用最大生成树算法(MST)选定最优 R-Vine 结构，通过非参数核密度估计(KDE)对模型中的时变参数进行描述，并重点对机械系统中常见的串-并联系统(混联系统)进行建模分析，最后通过航天器开闭轴系的算例，验证该模型的有效性。

关键词　R-Vine Copula 函数　串-并联系统　非参数核密度估计(KDE)　可靠性

中图分类号　V476.4　TH114

Abstract　Aiming at the dynamic mechanical system with multiple failure correlation，the copula function is used to describe the correlation of failure modes among units，and a reliability model of dynamic mechanical system with multiple failure correlations is proposed. The reliability problem of complex system is transformed into multiple two-dimensional pair copula functions by using R-Vine copula function. The optimal R-Vine structure is selected by using MST algorithm. The time-varying parameters in the model are described by nonparametric kernel density estimation (KDE). The common series parallel system (hybrid system) in mechanical system is modeled and analyzed. Finally，the effectiveness of the model is verified by an example of spacecraft open and close shafting.

Key words　R-Vine Copula function; Series-parallel system; Nonparametric kernel density estimation (KDE); Reliability

Corresponding author: *LIU Wei*，*E-mail*: *liuwei@ciomp.ac.cn. Tel/Fax*: +86-431-86178097.

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No.61627819).

Manuscript received 20200904，in revised form 20200922.

引言

在大型航天设备性能大幅提升的同时，其机械系统的复杂程度也在相应提升。为了提高系统的可靠性，降低系统的失效概率，串-并联系统(混联系统)在设计阶段得到了大量应用，其主要目的在于增加系统的冗余程度。

目前经典的可靠性理论[1]对于混联系统可靠度的计算，均假设各单元独立，将系统等效成串联系统，运用概率乘法原理得出系统的可靠度。这样的可靠性计算方法并未考虑到各单元之间失效模式的相关性，而在实际的工况下，机械系统的失效多是由于单个单元失效进而导致存活单元的工况恶化、载荷增大，最终使得系统的失效率增大。由此可以看出，传统的混联

* 20200904 收到初稿，20200922 收到修改稿。国家自然科学基金项目(61627819)资助。

** 冯　钧，男，1994 年 8 月生，甘肃嘉峪关市人，汉族，中国科学院长春光学精密机械与物理研究所硕士研究生，研究方向为机械系统可靠性研究。

*** 刘　伟，男，1967 年 12 月生，吉林长春人，汉族，中国科学院长春光学精密机械与物理研究所研究员，硕士生导师，研究方向为空间光学遥感器结构设计。

系统可靠性计算模型过于理想化,在实际应用的过程中存在一定的局限性。另外,随着系统的复杂程度的提高,各单元之间的相关性也就越强,且这种相关性往往是非线性的,如何构建出一个高维函数来准确描述动态系统的可靠性成为可靠性领域的研究重点。

近年来许多国内外学者尝试运用多种不同的方法来刻画系统可靠性中各单元间的相关关系。袁涛[2]以线性相关系数 ρ 为基础,结合摄动分析法,给出了任意分布的随机变量的灵敏度分析模型。吴帅兵等[3]尝试运用正交变换 Nataf 变换刻画系统可靠性中的相关关系。喻天翔等[4]尝试运用一种相关系数的新理论来进行机械系统可靠性中相关性的描述。另外,Mosleh A[5]对可靠性中的共因失效做了详细的阐述。随着统计学领域中 Copula 函数理论的发展,为解决系统可靠性问题提供了新的方法。目前国内已有部分学者将 Copula 函数的有关理论应用到机械系统可靠性的研究中,其中唐家银等[6-7]、易文德等[8]运用 Copula 函数构建出表决系统可靠性模型,胡启国等[9]运用 D-Vine Copula 函数耦合出复杂串联系统的可靠性模型。但上述学者的研究成果只解决了系统各单元间相依性的问题,对于实际系统的求解精度仍有相当的偏差。相比之下,R-Vine Copula 函数具有结构灵活,拟合优度高等特点,但其结构形式多样,解算极其繁琐,因此并未应用在机械系统可靠性计算方面。

文章以机械系统中常见的串-并联系统(混联系统)作为研究对象,通过 R-Vine Copula 函数构造出高维动态系统的可靠性模型,利用最大生成树算法(MST)明确 R-Vine 结构形式,进一步简化其结构,降低了解算的复杂度,将 R-Vine 模型推广到可靠性领域中,为复杂系统可靠性预测提供了更为准确的模型,同时针对时变参数估计量的无偏性问题,引入非参数核密度估计法(KDE)来明确其取值,并通过具体的算例进行定量分析。

1　Copula 函数相关理论

1.1　基本概念

Copula 函数是一类满足特定条件的函数的总称,能够将多元联合分布的密度函数分解成 n 个边缘分布与 Copula 函数的乘积,下面给出 n 维 Copula 函数的定义[10]。

多元 Copula 函数 $C(u_1,\cdots,u_n)$ 为满足以下条件的函数:

(1) 函数 $C(u_1,\cdots,u_n)$ 的定义域为 $[0,1]^n$。

(2) 函数 $C(u_1,\cdots,u_n)$ 是具有零基面且 n 维递增的。

(3) 任意的 $u_i \in [0,1]$, $i=1,2,\cdots,n$,满足

$$C(1,\cdots,1,u_i,1,\cdots,1)=u_i$$

$$C(u_1,\cdots,u_{i-1},0,u_{i+1},\cdots,u_n)=0$$

(4) 若 $u_1,\cdots,u_n$ 相互独立,则有

$$C(u_1,\cdots,u_n)=u_1\cdots u_n$$

多元 Copula 函数的 Sklar 定理,给出了构建联合分布的一般方法。下面给出 Sklar 定理的具体描述[11]201-265。

假定 $F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)$ 为一维连续分布函数,令 $u_1=F_1(x_1),u_2=F_2(x_2),\cdots,u_n=F_n(x_n)$,则 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 均为服从 $[0,1]$ 区间内的均匀分布,即 $C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是一个边缘分布服从 $[0,1]$ 区间内的联合分布函数。令 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为具有边缘分布函数 $F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)$ 的联合分布函数,则存在一个多维 Copula 函数 $C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,能够"连接"起边缘分布函数 $F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)$ 和联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,具体表现形式如下

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n))=C(u_1,u_2,\cdots,u_n) \tag{1}$$

多元 Copula 函数的 Sklar 定理揭示了多个随机变量可由各自的边缘分布耦合成联合分布,且各变量之间的相关性由 Copula 函数表征,针对不同的相关性,有不同的 Copula 函数来描述,相关程度则反映到 Copula 函数中的有关参数上面。

1.2　Copula 函数的种类与相关性测度

作为一种连接函数,Copula 函数包含了许多不同的分布族,其中较为常见的有两类,分别是椭圆分布族和 Archimedean 分布族,椭圆分布族中又包含了正态分布族和 t 分布族; Archimedean 分布族中常用的有 Gumbel Copula、Frank Copula、Clayton Copula 和阿基米德 Copula,下面简要介绍一下各个 Copula 函数以及其相关性测度。

正态 Copula 分布函数的表达式为[11]28-29

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n;\boldsymbol{\theta})=\varphi_\theta(\varphi^{-1}(u_1),\varphi^{-1}(u_2),\cdots,\varphi^{-1}(u_n)) \tag{2}$$

其中,φ_θ 为表示相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\theta}$ 的 n 维标准正态分布的分布函数,$\varphi^{-1}(\ )$ 为标准正态分布的分布函数的逆函数。正态 Copula 函数仅能描述对称的尾部相关性,因此局限性较大。

t-Copula 函数的分布函数和密度函数表达式[11]30-31

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n;\boldsymbol{\theta},k)=t_{\theta,k}[t_k^{-1}(u_1),t_k^{-1}(u_2),\cdots,t_k^{-1}(u_n)] \tag{3}$$

$$c(u_1,u_2,\cdots,u_n;\theta,k)=$$

$$|\boldsymbol{\theta}|^{-\frac{1}{2}}\frac{\tau\left(\frac{k+n}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\xi'\boldsymbol{\theta}^{-1}\xi\right)^{-\frac{k+n}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\xi_i^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}$ 为对角线上元素全为 1 的 n 阶对称正定矩阵，$t_{\theta,k}$ 为相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\theta}$、自由度为 k 的标准 n 维 t 分布的分布函数，t_k^{-1} 为自由度为 k 的一元 t 分布的分布函数的逆函数

$$\xi'=t_k^{-1}(u_1),t_k^{-1}(u_2),\cdots,t_k^{-1}(u_n) \tag{5}$$

t-Copula 同样也仅能描述对称的尾部相关性，但与正态 Copula 相比，由于尾部较厚，针对尾部相关性的描述更精确。

阿基米德 Copula 分布函数的定义，由 Genest 和 Mackay 在 1986 年给出，其表达式为[11]32-33

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\phi^{-1}[\phi(u_1),\phi(u_2),\cdots,\phi(u_n)] \tag{6}$$

式中，$\phi(u_i)$ 称为生成元，根据生成元可以构造出阿基米德 Copula 函数，构造时生成元需满足 $[0,1]$ 上为凸减函数。阿基米德 Copula 函数的尾部特性并不对称，因此对于非对称的随机变量间的相关性能够很准确的描述。比较常用的有 Gumbel Copula、Frank Copula 和 Clayton Copula，下面分别介绍各自的分布函数。

Gumbel Copula 的分布函数为[11]32-33

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n;\boldsymbol{\theta})=\mathrm{e}^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(-\ln u_i)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}} \tag{7}$$

其生成元为 $\varphi(u;\boldsymbol{\theta})=(-\ln u)^{\theta}$，其中 $\theta\in[1,\infty)$。该函数的特点为描述各随机变量间的正相关性。

Frank Copula 的分布函数为[11]35-36

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n;\boldsymbol{\theta})=-\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\theta u_i}-1)}{(\mathrm{e}^{-\theta}-1)^{n-1}}\right] \tag{8}$$

其生成元为 $\phi(u;\boldsymbol{\theta})=-\ln\frac{\mathrm{e}^{-\theta u}+1}{\mathrm{e}^{-\theta}-1}$，参数 θ 的取值范围与维度有关，且表示的相关性也不同。当 $n=2$ 时，$\theta\in(-\infty,+\infty)$，Frank Copula 函数尾部渐进于独立，即能描述正相关性也能描述负相关性；当 $n\geqslant3$ 时，$\theta\in(0,\infty)$，仅能描述正相关性。

Clayton Copula 的分布函数为[11]34-35

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n;\boldsymbol{\theta})=\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^{-\theta}-n+1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \tag{9}$$

其生成元 $\phi(u;\boldsymbol{\theta})=u^{-\theta}-1,\theta\in(0,\infty)$，Clayton Copula 函数仅能描述各随机变量间的正相关性，与 Frank Copula 函数相比，Clayton Copula 对下尾的变化比较敏感，而在上尾部分，变量则是渐进于独立的。

每一类 Copula 函数均表示了不同的相关结构，至于各随机变量之间相关性的强弱，则由相关参数 θ 来表示，而在动态系统中，由于考虑了时间序列，这一相关参数则是时间 t 的一元函数，用于表征相关性随时间的变化，本文采用非参数核密度估计法(KDE)来估计相关参数 $\theta(t)$ 的密度函数，详细描述见第三章，这里先简要介绍表征相关性的 Kendall 秩相关系数。

Kendall 秩相关系数是用来表征随机变量之间的相关性的一种参数，其基本概念为[11]58-60：

令 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 为随机变量 (X,Y) 的 N 组观测值样本，任意抽取两组观测值 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j)，若 $(x_i,y_i)(x_j,y_j)>0$，则称两组观测值是和谐的，此时 X 和 Y 正相关；反之，则称两组观测值不和谐，X 与 Y 负相关。Kendall 秩相关系数可由下式计算得出

$$\tau=\frac{c-d}{C_N^2} \tag{10}$$

式中，C_N^2 表示从样本中选取的 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j) 所组成的组合数，c 表示其中和谐的组合数，d 表示不和谐的组合数。$\tau\in[-1,1]$，其值越是趋近于区间端点，表明两个随机变量间的一致相关性越强。此外，表征相关性的参数还有 Spearman ρ 相关系数以及 Gini 关联系数 γ，这些相关性测度的表征参数均是从样本观测值和谐的概念入手的，这里不再赘述。

虽然 n 维 Copula 函数能够描述多个具有相关性的随机变量的联合分布，但是随机变量之间的相关性却被限制在相同的情况下，也就是说，上述的各种 Copula 函数各自只能描述一种相关性的随机变量，但在实际的情况下，我们需要描述的系统，各随机变量之间的相关性往往表现出不同的类别，因此，Joe H[12] 提出了 Pair Copula 的概念，其利用条件 Copula 函数，将高维随机变量的联合分布转化为多个不同的二维 Copula 函数的乘积，这样的分解方法也叫 Vine(藤) Copula。

Vine Copula 主要分为三种，分别是 C-Vine Copula、D-Vine Copula 和 R-Vine Copula。其中 C 藤和 D 藤结构简单，解析起来也较为方便，C 藤适合于描述存在某一主导因素的结构当中，即存在一个主导变量且与其他随机变量均具有相关性。D 藤结构固定，无法拟合出更复杂的相关性结构。相比之下，R 藤虽结构复杂，形式多样，解析起来较为繁琐，但也是最为灵活的一类 Vine Copula 函数，本文运用 R 藤 Copula 函数建立模型，并采用最大生成树算法进一步选择最优

的 R 藤结构。

1.3　R-Vine Copula 函数

R-Vine Copula 也称正则藤（Regular Vine）[13]，其对于高维随机变量的联合分布的分解过程，主要通过树形的嵌套结构来分层表示。对于一个 n 维的 R 藤结构，共需要 $n-1$ 层树，每层树结构均由若干的邻边连接不同的节点所组成，上层树中相邻节点间的邻边作为下层树的节点不断延伸。R 藤结构种类繁多，以 5 维为例，具体结构就有 240 种，如何选取最优的 R 藤结构，成为拟合模型的关键。而最大生成树算法（MST）的出现，为 R 藤结构的选择提供了理论依据。图 1 为一种典型的 5 维 R 藤结构，下面以此为例，简要介绍 R 藤结构的构造过程。

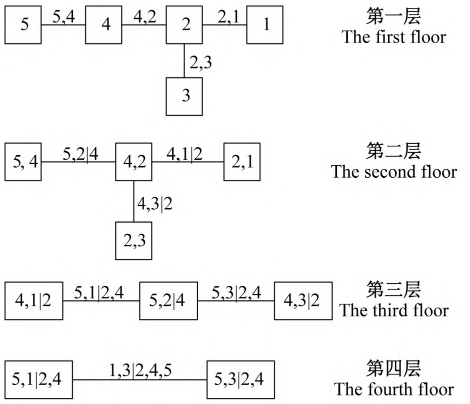

图 1　典型的 5 维 R-Vine Copula 结构

Fig.1　Typical five dimensional R-Vine Copula structure

图 1 所示的 5 维 R-Vine Copula 结构共有 4 层树，按照相邻边作节点，从第一层延伸至第四层，其构造流程如下：

(1)选定第一层结构。首先由观测值计算出任意两个随机变量之间的 Kendall 秩相关系数，依据最大生成树算法（MST），筛选出 Kendall 秩相关系数的绝对值最大的变量对，并以单个随机变量作为第一层树的节点，将这些变量对连接起来，同时满足"每个节点至少有一条边与之连接"的原则，便构造出第一层树。

(2)确定每条边对应的二维 Copula 函数的类型。依据赤池信息准则（AIC），选取 Copula 函数的类型。具体表达式为[14]

$$\mathrm{AIC} = 2k + n\ln\left(\frac{\mathrm{ssr}}{n}\right) \tag{11}$$

其中，k 为分布函数中的参数个数，n 为样本的容量，ssr 表示残差平方和。AIC 值越小，表明所选取的 Copula 函数越是能够准确的描述随机变量间的相关关系。通过计算筛选出 AIC 值最小的分布函数，将其选为邻边处的二维 Copula 函数。

(3)选定下层结构。基于二维 Copula 函数，得出条件 Copula 函数，进而代入下层结构，以上层树中相邻节点间的邻边作为下层树的节点，按照最大生成树算法（MST）和 AIC 准则，选定第二层树结构。

（4）重复步骤（3），继续构建其他层结构，直到节点个数仅剩 2 个为止，便完成 R-Vine Copula 结构的创建。

对于一个 n 维的 R-Vine Copula 结构，将每一层树的连接边作为集合 $P_1,\cdots,P_{n-1}$。则由文献[15]可知，基于 R 藤模型的联合概率密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{p\in p_i} c_{s_{p,a},s_{p,b}\mid D_p}\left(F_{s_{p,a}\mid D_p}(x_{s_{p,a}}\mid x_{D_p}),F_{s_{p,b}\mid D_p}(x_{s_{p,b}}\mid x_{D_p})\right) \tag{12}$$

式中，$f_k(x_k)$ 为各随机变量的边缘密度函数，p 为连接节点 a、b 的边，$s_{p,a}$，$s_{p,b}$ 为节点 a、b 上所有非条件变量的变量集合，D_p 为边 p 上所有条件变量的集合，$F_{s_{p,a}\mid D_p}(x_{s_{p,a}}\mid x_{D_p})$ 为二维 Copula 函数下的条件分布函数。

2　混联系统可靠性模型

串-并联系统也称作混联系统，是由若干个串联体系和并联体系连接而成。由于能够增加系统的冗余程度，混联系统在航天工程中大量应用，像美国哈勃空间望远镜（HST）的遮光板启闭轴系以及詹姆斯-韦伯空间望远镜（JWST）的多层席状遮光装置等均采用混联系统提高可靠性。

图 2 所示为由 n 个单元组成的串-并联系统的逻辑图，针对这样一个混联系统，先将该系统转化为等效串联系统，进而求解系统的生存函数。转化后的等效串联系统如图 3。

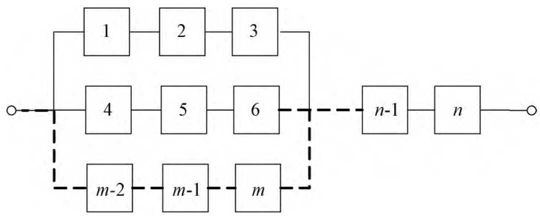

图 2　典型的串并联系统逻辑图

Fig.2　Typical logic diagram of series parallel system

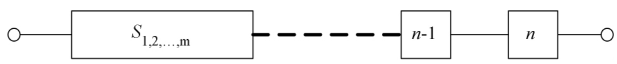

图 3　等效串联系统逻辑图

Fig.3　Logic diagram of equivalent series system

图 2 所示的混联系统中，共有 n 个单元所组成，其中 m 个单元组成并联体系，设其生存函数为 $R^{(1)}(t)$，其余 $n-m$ 个单元组成串联体系，生存函数为 $R^{(2)}(t)$。假设第 i 个单元的寿命为 X_i，且 $i=1,2,\cdots,$

n，令 $F_i(t)=P(T_i \leqslant t)$ 为 X_i 的分布函数，对于并联体系，可看做由 $\frac{m}{3}$ 个子系统并联而成，且每个子系统又是由相邻的单元组成的串联分系统。各单元的可靠性函数为 $R_i(t)=1-F_i(t_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则串联分系统的寿命为其所包含的各部件中寿命最小的，即

$$\begin{cases} T_1=\min(X_1,X_2,X_3) \\ T_2=\min(X_4,X_5,X_6) \\ \cdots\cdots \\ T_{\frac{m}{3}}=\min(X_{m-2},X_{m-1},X_m) \end{cases} \tag{13}$$

令串联分系统的生存函数为 $R_{\mathrm{F}}^i(t)$，$i=1,2,\cdots,\frac{m}{3}$，以第一个串联分系统 $R_{\mathrm{F}}^1(t)$ 为例，其可靠性函数为

$$R_{\mathrm{F}}^1(t)=P(T_1>t)=P\{\min(X_1,X_2,X_3)>t\}= P(X_1>t,X_2>t,X_3>t)$$

由于事件发生概率 $P(X_1>t,X_2>t,X_3>t)$ 难以直接求解，为此通过其逆事件 $P(\bigcup_{i=1}^{3} X_i \leqslant t)$ 进一步转化为 Copula 函数的形式求解，即

$$\begin{aligned} &P(X_1>t,X_2>t,X_3>t)=1-P(\bigcup_{i=1}^{3} X_i \leqslant t)= \\ &1-\sum_{i=1}^{3} P(X_i \leqslant t)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 3} P(X_i \leqslant t,X_j \leqslant t)- \\ &\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 3} P(X_i \leqslant t,X_j \leqslant t,X_k \leqslant t)=1- \\ &\sum_{i=1}^{3}(1-R_i(t))+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 3} C_2(1-R_i(t),1-R_j(t))- \\ &\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 3} C_3(1-R_i(t),1-R_j(t),1-R_k(t)) \end{aligned} \tag{14}$$

并联结构的寿命可表示为 $T=\max(X_{\mathrm{F}}^1,X_{\mathrm{F}}^2,\cdots,X_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}})$，其中，$X_{\mathrm{F}}^i$ 为各串联分系统的寿命，$i=1,2,\cdots,\frac{m}{3}$，则联合分布函数可表示为

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_{\frac{m}{3}})=P(X_{\mathrm{F}}^1 \leqslant t_1,X_{\mathrm{F}}^2 \leqslant t_2,\cdots,X_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}} \leqslant t_{\frac{m}{3}})$$

由多元 Copula 函数的 Sklar 定理，将联合分布函数表示为

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_{\frac{m}{3}})=C(F_{\mathrm{F}}^1(t_1),F_{\mathrm{F}}^2(t_2),\cdots,F_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}}(t_{\frac{m}{3}})) \tag{15}$$

式中，$F_{\mathrm{F}}^i(t)=P(T_{\mathrm{F}}^i \leqslant t)$ 表示 X_{F}^i 的分布函数，则并联结构的可靠性函数为

$$\begin{aligned} R^{(1)}(t)&=P(T>t)=P\{\max(X_{\mathrm{F}}^1,X_{\mathrm{F}}^2,\cdots,X_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}})>t\}= \\ &1-P\{\max(X_{\mathrm{F}}^1,X_{\mathrm{F}}^2,\cdots,X_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}}) \leqslant t\}= \\ &1-C(F_{\mathrm{F}}^1(t_1),F_{\mathrm{F}}^2(t_2),\cdots,F_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}}(t_{\frac{m}{3}}))= \\ &1-C(1-R_{\mathrm{F}}^1(t),1-R_{\mathrm{F}}^2(t),\cdots,R_{\mathrm{F}}^{\frac{m}{3}}(t)) \end{aligned} \tag{16}$$

而对于串联结构，系统的寿命取决于系统内寿命最小的单元，其寿命可表示为 $T=\min(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$，则串联结构的可靠性函数为

$$\begin{aligned} R^{(2)}(t)&=P(T>t)=P\{\min(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)>t\}= \\ &P(X_{m+1}>t,X_{m+2}>t,\cdots,X_n>t)= \\ &1-P(\cup_{i=m+1}^{n} X_i \leqslant t)= \\ &1-\sum_{i=m+1}^{n} P(X_i \leqslant t)+\sum_{m+1<i<j<n} P(X_i \leqslant t,X_j \leqslant t)- \\ &\sum_{m+1<i<j<k<n} P(X_i \leqslant t,X_j \leqslant t,X_k \leqslant t)+\cdots+ \\ &(-1)^n P(X_{m+1}>t,X_{m+2}>t,\cdots,X_n>t)= \\ &1-\sum_{i=m+1}^{n}(1-R_i(t))+\sum_{m+1<i<j<n} C_2(1-R_i(t),1-R_j(t))- \\ &\sum_{m+1<i<j<k<n} C_3(1-R_i(t),1-R_j(t),1-R_k(t))+\cdots+ \\ &(-1)^n C(1-R_{m+1}(t),1-R_{m+2}(t),\cdots,1-R_n(t)) \end{aligned} \tag{17}$$

该混联系统可看成并联体系与串联体系两部分串联而成，则该系统的可靠性函数为

$$R(t)=1-\sum_{i=1}^{2}[1-R^{(i)}(t)]+C\{[1-R^{(1)}(t)],[1-R^{(2)}(t)]\} \tag{18}$$

分析可知，任何复杂的混联系统，均可以等效成若干个串联系统看待，从而运用 Copula 函数建立动态机械系统的可靠性模型，通过构建 R 藤结构来求解联合概率密度函数，带入系统可靠性函数中，便完成了可靠性模型的构建。在这样的前提下，如何估计 Copula 函数中的时变参数 $\theta(t)$，成为亟待解决的问题。

3 非参数核密度估计

对于动态混联系统的可靠性问题，经过上面的分析可以转化为二维 Copula 函数的构建问题。如前所述，Copula 函数的类型表征不同的相关性；函数中的时变参数 $\theta(t)$ 则表征相关程度。对于 $\theta(t)$ 的估计，许多学者采用 Pearson 相关系数和 Kendall 秩相关系数来构造演化方程[16]，通过刻意的演化方程来求解估计值，这样的方法求出的估计值并不具备无偏性，同时与真实值往往存在一定的误差。

本文采用的非参数核密度估计法(KDE)，依据样本观测值估计密度函数的分布，具有渐进无偏性，同时避免了误差的出现，其本质属于密度估计问题。

3.1 动态 Copula 函数的非参数核密度估计法

假设二元 Copula 函数的边际分布为 $F(x)$，$F(y)$，其独立观测值序列为 $\{(x_t,y_t)\}_{t=1}^{T}$，通过经验分布函数将独立观测序列转换为服从 $[0,1]$ 区间内均匀分布的伪观测序列 $\{(\hat{u}_t,\hat{v}_t)\}_{t=1}^{T}$，则在点 (x_t,y_t) 处伪观测序列 $\{(\hat{u}_t,\hat{v}_t)\}_{t=1}^{T}$ 的分布函数的估计值为[17]175-227

$$\begin{cases} \hat{u}_t=\hat{F}_x(x_t)=\dfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} I(x_i \leqslant x_t) \\ \hat{v}_t=\hat{F}_y(y_t)=\dfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} I(y_i \leqslant y_t) \end{cases} \tag{19}$$

式中，$I(\ )$ 为示性函数，$\hat{F}_x(\ )$，$\hat{F}_y(\ )$ 为经验分布函数。对于未知参数 $\theta(t)$，可以在一个微小区间内 $[t_0-h, t_0+h]$ 通过时间 t 的线性函数 $\theta(t) \approx a + b(t-t_0)$ 来局部近似，因此，目标分布函数为 $C(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \theta(t))$，通过对分布函数求导得到密度函数 $c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; a, b)\ \theta'(t)$，采用非参数核密度估计法(KDE)来估计 $\theta'(t)$，即 $\theta'(t) = K_h(t-t_0)$，故局部似然函数可表示为[17]175-227

$$L(a, b; h, t_0) = \sum_{t=1}^{T} \lg c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; a, b)\, K_h(t-t_0) \tag{20}$$

其中，$c(u,v) = \dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ 表示 Copula 函数的密度函数，$K_h(\ ) = \dfrac{1}{h}K(\dfrac{1}{h})$，$K(\ )$ 表示核函数，h 表示带宽。假设核函数和带宽 h 均已选定，对局部似然函数极大化便可得到参数 a, b 的估计值，即[17]175-227

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \underset{a,b}{\arg\max} L(a, b; h, t_0) = \underset{a,b}{\arg\max} \sum_{t=1}^{T} \lg c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; a, b)\, K_h(t-t_0) \tag{21}$$

从而时变参数的估计值为 $\hat{\theta}(t_0) = \hat{a}$，通过上面的分析可以看出，核密度估计的关键在于核函数和带宽的选取。

3.2　核函数的选择

从统计学理论上讲，任何函数均可作为核函数，但不同的核函数所估计出的结果也不同。对于最优核函数的选取问题，可以通过估计值 $\hat{f}$ 的准确性来判断，$\hat{f}$ 的渐进积分均方误差 B_{AMISE} 为[18]443-452

$$B_{\mathrm{AMISE}} = \frac{R(K)}{nh} + \frac{h^4 \sigma_{\mathrm{K}}^4 (f'')}{4} \tag{22}$$

其中，$R(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)^2 \mathrm{d}u$，$\sigma_{\mathrm{K}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)\, \mathrm{d}u$，$f$ 为真实密度函数。通过极小化 B_{AMISE} 来寻找最优核函数，极小化的 B_{AMISE} 为[18]444-445

$$\min(B_{\mathrm{AMISE}}) = \frac{5}{4}\left[\sigma_{\mathrm{K}} R(K)\right]^{\frac{4}{5}} R(f'')^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{4}{5}} \tag{23}$$

式中，仅 $\sigma_{\mathrm{K}} R(K)$ 一项与核函数有关，令 $M = \sigma_{\mathrm{K}} R(K)$，即最优的核函数能够使得 M 为最小，这便为最优核函数的选择提供了方向。文献[18]445-446 中提到一种 Epanechnikov 核函数，能够满足 M 最小这一条件，该核函数的表达式为[18]445-446

$$K(u) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1-u^2) & |u| \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{24}$$

Epanechnikov 核函数的 M 值为 $\dfrac{3}{5\sqrt{5}}$，因此可以用这样一个比例 $\dfrac{M}{(\frac{3}{5\sqrt{5}})}$ 作为有效系数来衡量各类核函数对于 Epanechnikov 核函数的有效性。即在相同的渐进积分均方误差 B_{AMISE} 的条件下，各类核函数所需要的样本数目 n 相当于 Epanechnikov 核函数所需样本数目的倍数。各类核函数的表达式及其有效系数见表 1。通过表中的数据，可以看到 Epanechnikov 核函数是最优核函数，同时三角核和三权核的估计效果一致。在大样本的条件下，各类核函数的估计效果几乎相同，核函数的选择对于估计结果的影响十分有限。因此，带宽的选择便成为影响估计效果最为关键的核心参数。

表 1　各类核函数及其有效系数

Tab.1　Various kernel functions and their effective coefficients

核函数 Kernel types	表达式 Expression	有效系数 Effective coefficient
Epanechnikov 核 Epanechnikov kernel	$\frac{3}{4}(1-u^2)$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1
高斯核 Gaussian kernel	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.051 4
矩形核 Rectangular kernel	$\frac{1}{2}$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.075 8
双权核 Double weight kernel	$\frac{15}{16}(1-u^2)^2$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.006 4
三角核 Trigonometric kernel	$1-\lvert u\rvert$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.013 6
余弦核 Cosine kernel	$\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2}u)$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.000 7
三权核 Three weight kernel	$\frac{25}{32}(1-u^2)^3$，$I(\lvert u\rvert \leqslant 1)$	1.013 6

3.3　带宽的选择

在非参数核密度估计的过程中，带宽 h 决定了估计结果的平滑程度以及估计值 $\hat{f}$ 的准确性。可将带宽 h 视为一个缩放因子，用于控制核函数在样本点处分布的宽度。

不同的带宽所得到的估计结果也不同，带宽 h 过小时，估计值 $\hat{f}$ 曲线过于陡峭，无法体现出真实的分布情况，而带宽 h 过大时，则 $\hat{f}$ 曲线又过于平滑。文献[19]提出的交叉验证法，能够选取最优的带宽 h_{opt}

$$h_{\mathrm{opt}} = \underset{h}{\arg\max} \sum_{t=1}^{T} \lg c(\hat{u}_t, \hat{v}_t, \hat{\theta}(t,h); h) \tag{25}$$

式中，$\hat{\theta}(t,h)$ 则表示在给定的 h 条件下，通过极大化式(20)得到。在实际应用时，也需要根据样本点的密度来合理选择带宽，在数据集中的样本点附近，h 应选取较小，便能充分反映出样本点数据对估计结果的影响，反之，h 则选较大，避免因少数极端的样本点影响总体的分布情况。

4 算例分析

某型号太空望远镜的遮光板部件的开闭动作由一大尺寸空间开合机构实现，运动过程如图 4 所示。开合机构主要由遮光板两侧的伸缩杆以及转轴、轴承和合页所组成，伸缩杆的运动由滚珠丝杠副实现，系统逻辑图如图 5 所示。该系统由伺服电机驱动，输入功率为 $P=30$ kW，在轨环境下，开和时间为 3 min。

图 4 空间开合机构的运动过程

Fig.4 Motion process of spatial opening and closing mechanism

由于转轴与合页承受交变载荷，其疲劳寿命的分布函数常符合对数正态分布，根据其概率密度函数计算可靠度。滚动轴承的接触疲劳寿命服从三参数

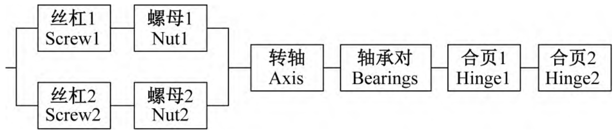

图 5 空间开合机构可靠性逻辑图

Fig.5 Reliability logic diagram of spatial opening and closing mechanism

Weibull 分布，故按照分布函数计算可靠度；考虑到在轨环境下各零件直接接触会产生真空冷焊，进而在零件表面镀有 MoS_2 镀层，镀层厚度3 000 μm±300 μm，因此滚珠丝杠副的主要失效模式为磨损失效，可用 Archard 磨损理论求解磨损量，进而推导出其功能函数。该理论认为材料磨损量与接触面的法向载荷、滑移距离成正比，与材料硬度成反比，即 $V=KI\dfrac{f}{H}$，其中，V 表示磨损体积，K 为磨损因子，I 为滑移距离，f 为法向载荷，H 为硬度，具体的功能函数与失效模式见表 2。

表 2 各单元的失效模式、生存函数以及功能函数

Tab.2 Failure modes, survival functions and performance functions of each unit

单元 Unit	主要失效模式 Major failure mode	生存函数 Survival function	功能函数 Performance function
丝杠 Screw	磨损失效 Wear failure	$R_{1,2}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z(t)}\mathrm{e}^{-\frac{[z(t)]^2}{2}}\mathrm{d}z(t)$	$X_{1,2}(t)=\varepsilon-KI\dfrac{f(T(t),N)}{H}$
螺母 Nut	磨损失效 Wear failure	$R_{3,4}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z(t)}\mathrm{e}^{-\frac{[z(t)]^2}{2}}\mathrm{d}z(t)$	$X_{3,4}(t)=\varepsilon-KI\dfrac{f(T(t),N)}{H}$
转轴 Axis	疲劳强度失效 Fatigue strength failure	$R_5(N)=1-\int_{-\infty}^{\frac{\ln N-\mu}{\sigma}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln N-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln N-\mu}{\sigma}\right)$	$X_5(t)=\sigma_{-1\mathrm{K}}-\sqrt{\left(\dfrac{M_1}{W_1}\right)^2+4\left(\dfrac{\alpha\eta_1T(t)}{W_{\tau1}}\right)^2}$
合页 Hinge	疲劳强度失效 Fatigue strength failure	$R_{6,7}(N)=1-\int_{-\infty}^{\frac{\ln N-\mu}{\sigma}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln N-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln N-\mu}{\sigma}\right)$	$X_{6,7}(t)=\sigma_{-1\mathrm{K}}-\sqrt{\left(\dfrac{M_2}{W_2}\right)^2+4\left(\dfrac{\alpha\eta_2T(t)}{W_{\tau2}}\right)^2}$
轴承 Bearing	接触疲劳点蚀失效 Fatigue pitting failure	$R_{g(t)}=\mathrm{e}^{\left[-\left(\frac{t-t_0}{t_{\mathrm{e}}^{-1}-t_0}\right)^{\beta}\right]}$	寿命分布 Life distribution $F_8(t)=1-\mathrm{e}^{\left[-\left(\frac{t-t_0}{t_{\mathrm{e}}^{-1}-t_0}\right)^{\beta}\right]}$

表 2 中，N 代表循环次数，$R(N)$ 表示在循环次数为 N 时，该单元的可靠性函数，t 表示工作时间，$X_i(t)$ 表示不同工作时间下各单元的寿命，$i=1,2,\cdots,7$。$z(t)$ 为联结方程，$z(t)=-\dfrac{\bar{w}_t-\bar{w}^*}{\sqrt{\sigma_{w_t}^2+(\sigma_{w^*})^2}}$，其中，$\bar{w}_t$ 为 t 时刻下磨损量的均值；σ_{w_t} 为其标准差；$\bar{w}^*$ 为容许磨损量的均值；σ_{w^*} 为其标准差，假设磨损量服从正态分布；μ，σ 分别为 $\ln N$ 的均值与标准差，令 $z(N)=\dfrac{\ln N-\mu}{\sigma}$，可将对数正态分布标准化；$t_0$ 表示轴承的最小寿命，即 Weibull 分布的位置参数；t_{e}^{-1} 表示特征寿命，即尺度参数，β 为 Weibull 斜率，即形状参数，对于球轴承 $\beta=\dfrac{10}{9}$。ε 表示许用磨损量，K 为磨损因子，通常情况下取 2×10^{-5}，I 为滑移距离，$T(t)$ 为负载转矩，$f(T(t),N)$ 表示法向压力，其与转矩和循环次数有关，H 为布氏硬度；$\sigma_{-1\mathrm{K}}$ 为零件的对称疲劳强度极限，α 为扭转应力的折算系数，η_i 是传递效率，M_i 是弯矩，W_i 为抗弯截面模量，$W_i=\dfrac{\pi d_i^3}{32}$，$W_{\tau i}$ 为抗扭截面模量，$W_{\tau i}=\dfrac{\pi d_i^3}{16}$。

假设 MoS_2 镀层在时间节点为2 000 h、4 000 h、6 000 h、8 000 h、10 000 h时，磨损量均值及其标准差 $(\bar{w},\sigma_w)$ 分别为 (2300，5.04)、(2600，9.18)、

(2716.88,14.57)、(2809.63,18.73)、(2958,21.57);容许磨损量为 3 000 μm,由 3σ 原则可知,σ_{w^*} 为 100 μm。若转轴与合页疲劳寿命的对数均值 μ,标准差 σ 均为: $\mu = 12.2431$,$\sigma = 0.6190$。此外,轴承的失效模式为接触疲劳失效,t_0 取 2 384 h,t_e^{-1} 取 14 988 h,由于独立于其他单元的失效模式,因此在分析系统的可靠性时,按照独立原则计算,进一步对系统逻辑图进行简化,同时对各连接边标号,以便选取 Pair Copula 函数,结果如图 6 所示。

根据已知的相关数据,按照一次二阶矩法计算各单元的可靠度值,计算结果见表 3。

表 3　各单元的可靠度(2 000 h)

Tab.3　Reliability of each unit(2 000 h)

名称 Unit	丝杠 Screw	螺母 Nut	转轴 Axis	轴承 Bearing	合页 Hinge
R_i	1.000	1.000	0.996 1	0.979 6	0.996 1

如图 6 所示,空间开合机构可看成由并联结构与串联结构组合而成,其中并联结构又由两个串联分系统并联而成,仅在串联结构中出现了三维密度函数,针对串联结构运用 R-Vine Copula 结构进一步求解其联合概率密度。利用 Monte Carrlo 模拟法,在时间结点分别为2 000 h、4 000 h、6 000 h、8 000 h、10 000 h处模拟100 000 次,将仿真结果带入式(10)、式(11)、式(21)中,得出时变参数 $\theta(t)$ 的估计值,进一步确定 R-Vine Copula 结构以及选取二元 Pair Copula 函数。图 7 为三维 R 藤结构,连接边 A、B 对应 5,B、C 对应 6。表 4 则给出了各部件间 Copula 函数的选型结果以及不同时间节点下的时变参数估计值。

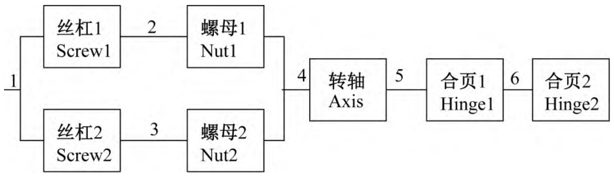

图 6　简化开合机构可靠性逻辑图

Fig.6　Simplified reliability logic diagram of opening and closing mechanism

表 4　Copula 函数选型及参数估计

Tab.4　Copula function and parameter estimation

连接边 Edge	Pair Copula	2 000 h	4 000 h	6 000 h	8 000 h	10 000 h
1	Frank	1.176	1.375	1.713	2.324	2.326
2	Clayton	0.958	1.035	1.062	3.124	3.487
3	Clayton	0.958	1.035	1.062	3.124	3.487
4	Frank	0.246	0.638	0.936	1.085	2.804
A,B	Gumbel	1.201	1.743	2.504	2.661	3.142
B,C	Gumbel	1.201	1.743	2.504	2.661	3.142
$A,C\mid B$	Clayton	1.671	1.795	2.038	2.280	2.768

将系统进一步等效为串联系统,运用独立假设、最

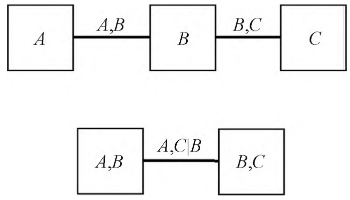

图 7　三维 R-Vine 结构

Fig.7　Three dimensional R-Vine structure

薄弱环节理论以及 R-Vine Copula 模型分别计算该系统的可靠度:

(1) 若系统中各单元的失效模式完全独立,则由独立假设计算的系统可靠度为

$$R_s = [1-(1-R_1R_2)(1-R_3R_4)]$$
$$R_5R_6R_7R_8^2 = 0.948\,4$$

(2) 若系统中并联部分的各分支相互独立,其余各单元的失效模式完全相关,即 $R_F^1 = \min(R_1, R_2)$;$R_F^2 = \min(R_3, R_4)$ 则对等效串联系统,通过最薄弱环节理论计算的系统可靠度为

$$R_s = \min\{[1-(1-R_F^1)(1-R_F^2)],$$
$$R_5, R_6, R_7, R_8\} = 0.979\,6$$

(3) 实际上由于该系统的多种失效模式的功能函数之间具有相同的随机源,如疲劳失效功能函数与磨损失效功能函数之间负载转矩作为随机源,不仅直接影响疲劳强度,也通过接触压力决定磨损量。因此,各单元的失效模式之间存在非线性的相依关系,且相关程度随时间变化,选择利用动态 R-Vine Copula 结构来计算这种多失效相关的动态系统的可靠度。根据表 4 中的数据,带入式(14)~式(18),并由独立假设代入轴承的可靠度值 $R_8(t)$,即 $R_s = R(t)R_8(t)^2$,通过 Monte Carrlo 模拟法,在时间节点分别为 2 000 h、4 000 h、6 000 h、8 000 h、10 000 h 处模拟 100 000 次,所得到的可靠度值为: 0.958 1、0.790 6、0.560 6、0.402 3、0.220 8。如图 8 所示,动态 R-Vine Copula 函数得到的可靠度值介于独立假设和最薄弱环节理论之间。

根据可靠性工程中的一般界限理论[20],即系统真实的可靠度应处于一个区间范围内,其下界为独立假设算法所计算的可靠度值,上界则为最薄弱环节理论计算的可靠度值。如图 8 所示,动态 R-Vine 模型处于该区间之内,从而提高了复杂系统可靠性评估的精度。

5　结论

文章通过 Copula 函数来描述随机变量之间的相关性,并应用于混联系统可靠性建模的过程中,针对高维 Copula 函数,采用 R-Vine 结构分解为多个二维 Pair Copula 函数,通过非参数核密度估计法(KDE)估计时变参数的取值,以大尺寸空间开合机构为对象,进一步

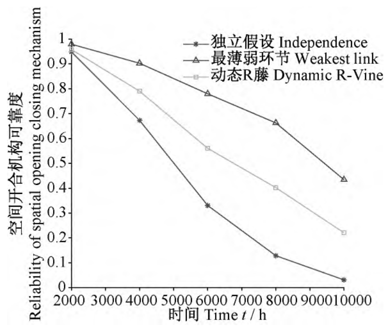

图 8 空间开合机构可靠度曲线

Fig.8 Reliability curve of spatial opening and closing mechanism

验证了动态 R-Vine 模型的拟合优度，通过比对独立假设、最薄弱环节理论以及动态 R-Vine 模型在系统可靠度计算上的差异，得出以下结论:

1) 动态 R-Vine 模型的拟合优度更好，对混联系统的可靠性表达更准确，更符合实际情况。其不仅包含了多样化的相关性结构，更体现出相关程度随时间的变化。动态 R-Vine 模型的计算结果位于一般界限理论之内，从而进一步提高了复杂系统可靠性计算的精度。

2) 通过非参数核密度估计(KDE) 与似然函数相结合的方法，构造出以 Epanechnikov 为内核的密度函数来估计时变参数的取值，估计结果具有渐进无偏性，对相关程度的描述更准确。

参考文献(References)

[1] 刘惟信.机械可靠性设计 [M] .北京: 清华大学出版社，1996: 288-302.
LIU WeiXin. Mechanical reliability design [M] . Beijing: Tsinghua University Press，1966: 288-302(In Chinese) .

[2] 袁 涛.机械结构参数相关性与串并联体系可靠性灵敏度设计与应用 [D] .长春: 吉林大学，2007: 10-16.
YUAN Tao. Reliability sensitivity design and application of mechanical structure parameters correlation and series parallel system [D] .Changchun: Jilin University，2007: 10-16(In Chinese) .

[3] 吴帅兵，张 坤，李典庆.相关非正态变量变换时相关性变化对可靠度的影响 [J] .武汉大学学报(工学版) ，2011，44(2) : 151-155.
WU ShuaiBing， ZHANG Kun， LI DianQing. The influence of correlationchange on reliability in the transformation of correlated non normal variables [J] . Journal of Wuhan University (Engineering Edition) ，2011，44(2) : 151-155(In Chinese) .

[4] 喻天翔，孙玉秋，张祖明.多模式失效的机械零件可靠度计算新理论 [J] .机械工程学报，2009，39(3) : 134-138.
YU TianXiang， SUN YuQiu， ZHANG ZuMing. New theory of reliability calculation for mechanical parts with multi mode failure [J] .Journal of Mechanical Engineering，2009，39(3) : 134-138(In Chinese) .

[5] MOSLEH A.Common cause failures: An analysis methodology and examples [J] . Reliability Engineering and System Safety，1991，34 (3) : 249-292.

[6] 唐家银，何 平，陈崇双.相关性失效机械系统的可靠性分析方法 [M] .北京: 国防工业出版社，2014: 22-47.
TANG JiaYin， HE Ping， CHEN ChongShuang. Reliability analysis method of mechanical system with dependent failure [M] . Beijing: National Defense Industry Press，2014: 22-47(In Chinese) .

[7] 唐家银，赵永祥，何 平，等.零件失效相关表决系统 Copula 可靠性模型 [J] .机械设计，2010，27(7) : 24-29.
TANG JiaYin， ZHAO YongXiang， HE Ping， et al. Copula reliability model of component failure related voting system [J] Machine Design，2010，27(7) : 24-29(In Chinese) .

[8] YI Wen De， WEI Gui Wu. Study on the reliability of dependenceparts vote system based on Copula functions [J] .Journal of Southwest China Normal University(Natural Science Edition) ， 2007，32(6) : 52-55.

[9] 胡启国，周 松.Vine Copula 模型的失效动态相关机械系统可靠性分析 [J] .机械科学与技术，2018，37(8) : 1149-1155.
HU QiGuo， ZHOU Song. Reliability analysis of failure dynamic dependent mechanical system based on Vine Copula model [J] . Mechanical Science and Technology，2018，37 (8) : 1149-1155 (In Chinese) .

[10] NELSEN R B.An introduction to copulas [M] .2nd ed.New York: Springer，2006: 7-35.

[11] 李 霞.Copula 方法及其应用 [M] .北京: 经济管理出版社，2014: 28-60.
LI Xia. Copula method and its application [M] . Beijing: Economic Management Press，2014: 28-60 (In Chinese) .

[12] JOE H. Families of m-variate distributions with given margins and m (m - 1) /2 bivariate dependence parameters [J] . Lecture Notes-Monograph Series， 1996: 120-141.

[13] BEDFORD T， COOKE R M. Vines: A new graphical model for dependent random variables [J] . Annals of Statistics，2002，30(4) : 1031-1068.

[14] 裴宏杰，陈钰荧，李公安，等.基于 Copula 函数的铣削力、振动与表面粗糙度的相关性分析 [J] .航空制造技术，2019，62(9) : 59-67.
PEI HongJie， CHEN YuYing， LI GongAn， et al. Cor-relation analysis of milling force， vibration and surface roughness based on Copula function [J] . Aviation Manufacturing Technology，2019，62 (9) : 59-67(In Chinese) .

[15] 张乔微，李艳婷.基于 R-Vine Copula 的多维混合型数据控制图设计 [J] .工业工程，2019，22(5) : 126-132.
ZHANG QiaoWei， LI YanTing. Design of multidimensional mixed data control chart based on R-Vine Copula [J] . Industrial Engineering，2019，22(5) : 126-132(In Chinese) .

[16] Li Dian Qing，Tang Xiao Song，Zhou Chuang Bing，et al.Uncertainty analysis of correlated non-normal geotechnical parameters using Gaussian copula [J] .Science China Technological Sciences，2012，55 (11) : 3081-3089.

[17] Cherubini U，Gobbi F，Mulinacci S，et al.Dynamic copula methods in finance [M] .Hoboken，NJ: Wiley，2012: 175-227.

[18] 栾世杰，于佳伟，郑松林，等.基于非参数核密度估计法的商用车服役载荷环境研究与应用 [J] .机械强度，2020，42(2) : 443-452.
LUAN ShiJie， YU JiaWie， ZHENG SongLin， et al. Research and application of commercial vehicle service load environme-nt based on nonparametric kernel density estimation met-hod [J] . Journal of Mechanical Strength，2020，42(2) : 443-452(In Chinese) .

[19] 吴吉林，孟纹羽.时变混合 Copula 模型的非参数估计及应用研究 [J] .数量经济技术经济研究，2013，30(8) : 124-136.
WU JiLin，MENG WenYu.Nonparametric estimation in time varying mixture copula and its application in stock markets [J] .The Journal of Quantitative & Technical Economics，2013，30(8) : 124-136(In Chinese) .

[20] Cornell C A.Bounds on the reliability of structural system-s [J] .J. Struct.Meth，1967，93(1) : 171-200.