



中国机械工程  
China Mechanical Engineering  
ISSN 1004-132X, CN 42-1294/TH

## 《中国机械工程》网络首发论文

题目：交叉簧片柔性铰链设计  
作者：吴昊，李宗轩，张德福，李清雅，李云峰  
网络首发日期：2021-10-22  
引用格式：吴昊，李宗轩，张德福，李清雅，李云峰. 交叉簧片柔性铰链设计[J/OL]. 中国机械工程. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1294.TH.20211022.1431.016.html>



**网络首发：**在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认：**纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 交叉簧片柔性铰链设计

吴昊<sup>1,2,3</sup> 李宗轩<sup>1,3</sup> 张德福<sup>1,3</sup> 李清雅<sup>1,3</sup> 李云峰<sup>1,2,3</sup>

1.中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 长春, 130033

2.中国科学院大学, 北京, 100039

3.中国科学院天基动态快速光学成像技术重点实验室, 长春, 130033

**摘要：**针对某光学仪器对光学元件柔性支撑的要求，提出了一种新型交叉簧片型柔性铰链，并利用卡式第二定理研究了设计方法。首先，利用卡式第二定理推导交叉簧片型柔性铰链的柔度计算公式，确定铰链的轴向刚度与转动刚度，分析了直梁长度、直梁高度和空心圆柱壁厚对其刚度的影响；然后，进行了实例设计，并利用有限元软件进行了分析。最后，搭建光学测试平台，对实例进行了转动角度和转动刚度的测量。结果表明：解析解、仿真解和实验测量数据符合性较好，最大相对误差为 8.7%。使用卡式第二定理作为设计工具，设计者可根据交叉簧片柔性铰链的刚度与结构应力等要求，确定几何参数，而且交叉簧片柔性铰链的设计对其他铰链的结构形式提供了新的思路。

**关键词：**交叉簧片柔性铰链；有限元分析；卡式第二定理；转动刚度

**中图分类号：**TH122 **DOI：**

## Design of cross-spring flexure hinge

WU Hao<sup>1,2,3</sup> LI Zongxuan<sup>1,3</sup> ZHANG Defu<sup>1,3</sup> LI Qingya<sup>1,3</sup> LI Yunfeng<sup>1,2,3</sup>

1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, 130033

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100039

3. Key Laboratory of Space-based Dynamic Rapid Optical Imaging Technology, Chinese Academy of Sciences, Changchun, 130033

**Abstract:** To realize the requirement of a certain optical instrument for flexural hinge, a new type of cross-spring flexural hinge was proposed, and the design method was studied by using the Castigliano's second theorem. First, use the Castigliano's second theorem to derive the flexibility calculation formula of the cross-spring flexural hinge to determine the axial rigidity and rotational rigidity of the hinge. Then, a case design was carried out and the finite element analysis was used for simulation. Finally, an optical test platform was set up and the rotation stiffness of the example was measured. The results showed that the analytical solution, the simulation solution and the experimental data were in good agreement, and the relative error was 8.7%. Using the Castigliano's second theorem as a design tool, the designer can determine the dimensional parameters according to the rigidity and structural requirements of the cross-spring flexural hinge, and the design of the cross-spring flexural hinge provides a new approach method for other hinges.

**Key words:** Cross-spring flexural hinge; finite element analysis; the Castigliano's second theorem; rotational stiffness

## 0 引言\*

柔性铰链是通过材料的弹性变形和其自恢复特性实现运动与力传递的结构<sup>[1-2]</sup>，凭借结构紧凑、

无间隙、无摩擦、运动精度高、制造工艺简单等优点<sup>[3]</sup>，被广泛应用于光学仪器、现代空间探测、生物细胞微操作以及微机电系统中<sup>[4-5]</sup>。

国内外研究机构对交叉簧片柔性铰链的研究已展开多年。2020年，L.A. Goncalves Junior 研究了交叉簧片柔性铰链的轴漂、转动刚度以及应力

基金项目：国家自然科学基金资助项目（62005275）

集中问题，设计了试验评估交叉簧片柔性铰链的适用性<sup>[6]</sup>。K.Markovic 等人研究了铰链在最小转角范围与转动刚度情况下的稳定性，证明交叉簧片柔性铰链可以应用于 MEMS 等超高精度领域<sup>[7]</sup>。毕树生基于 Awtar 提出的简化模型揭示了柔性铰链的翘曲变形机理，建立了柔性铰链的翘曲模型<sup>[8]</sup>；2018 年，杨淼等人基于 Euler-Bernoulli 梁理论建立了铰链末端载荷与铰链变形之间的关系，改善了等截面铰链轴漂大的问题<sup>[9]</sup>。

在上述研究中，将交叉簧片柔性铰链用于光学反射镜支撑结构却鲜有探讨，也没有提出一种简单、精度高的设计方法。

交叉簧片型柔性铰链属于分布柔度型铰链，由两个柔性梁呈一定角度复合而成，具有转角行程大、应力分布、寿命长、易于加工装配等优点<sup>[10]</sup>。利用电火花线切割技术将一个空心圆柱体沿两个正交方向分别对称加工，即形成两个正交方向上具有相同柔度的交叉簧片型柔性环节，相比于切口型柔性铰链，此柔性铰链具有以下优点：回转中心不集中，可以减少应力集中；柔性环节呈一定角度，在不增加有效铰链的长度下，减小应力集中。

本文提出了一种新型交叉簧片型柔性铰链，并利用卡式第二定理对其进行分析，推导出交叉簧片型柔性铰链刚度的计算公式，分析了直梁长度、直梁高度与空心圆柱体厚度对交叉簧片型柔性铰链刚度的影响。同时，对铰链进行了实例设计，并进行了有限元仿真与实验验证。通过三种方法所得结果验证了利用卡式第二定理设计分析交叉簧片柔性铰链的准确性。

## 1 交叉簧片柔性铰链刚度计算公式

### 1.1 交叉簧片柔性铰链结构

根据某光学仪器对光学元件的柔性支撑的要求给出柔性铰链的设计指标如表 1 所示。此光学元件的柔性支撑要求在运动方向上具有较大的柔度，而在非运动方向上具有较小的柔度。因此根据以上要求，对空心圆柱体进行线切割，形成 4 处尺寸完全一致的簧片柔性环节，为光学元件提供绕两轴进行转动而限制其他方向自由度的约束。设计的交叉簧片型柔性铰链如图 1 所示，图 1(a)为交叉簧片铰链正视图，图 1(b)为交叉簧片型柔性铰链的柔性环节局部放大示意图，图 1(c)为铰链的俯视剖视图，图 1(d)为铰链的正三轴测图。

表 1 交叉簧片柔性铰链设计指标

Tab.1 Design index of cross-spring flexural hinge

性能参数	符号	数值	单位
轴向刚度	$K_z$	$\geq 1.6 \times 10^7$	$N/m$
转动刚度	$K_M$	$\leq 1500$	$Nm/rad$
最大转角	$\theta$	$\pm 2.3$	deg

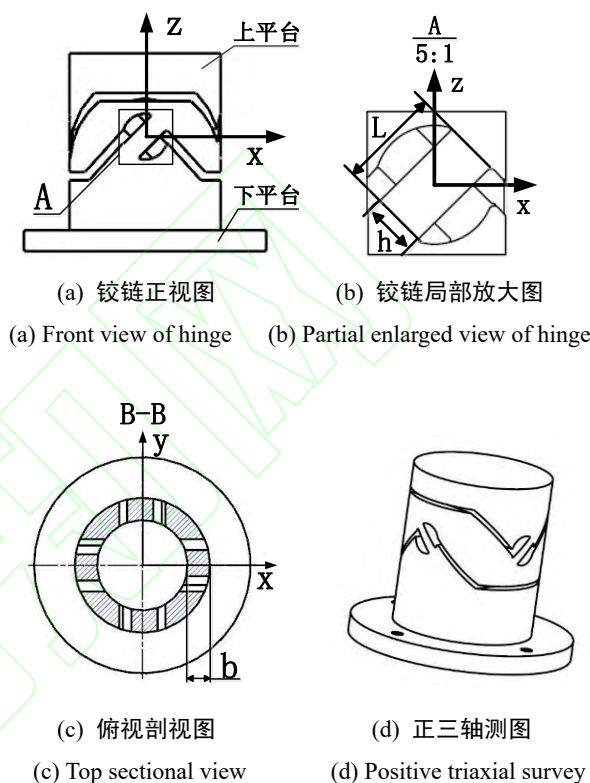


图 1 交叉簧片柔性铰链结构图及参考坐标系  
Fig.1 The structure diagram and reference coordinate system of the cross-spring flexural hinge

如图 1 所示，影响交叉簧片柔性铰链刚度的主要结构参数为：单根直梁的长度  $L$ ，单根直梁的高度  $h$ ，和空心圆柱体的壁厚  $b$ 。其中，单根直梁高度  $h$  受直梁长度  $L$  的约束，而空心圆柱体壁厚  $b$  与直梁高度  $h$ 、直梁长度  $L$  完全独立。

在单一轴运动方向上，交叉簧片型柔性铰链可简化为一个交叉铰链柔性环节，图 2 为交叉簧片柔性铰链，展现了最简单的设计，当外部载荷作用在转动平台时，通过梁的分布式柔性变形来实现转动平台相对于固定平台的转动，其可以等效为在运动方向上两个直梁的并联，等效力模型如图 3 所示，根据串并联弹簧原理<sup>[11]</sup>，可以得到交叉簧片铰链的刚度为：

$$K = 2K_1 \quad (1)$$

其中， $K_1$  为单一直梁的刚度。

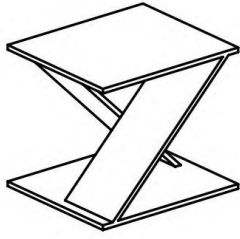


图2 交叉簧片型柔性铰链结构

Fig.2 The structure of cross-spring flexural hinge

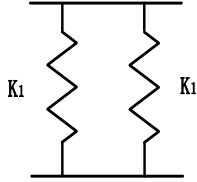


图3 铰链受力等效力模型

Fig.3 Equivalent model of the load of the hinge

### 1.2 交叉簧片柔性铰链单一直梁柔度矩阵的计算

在对交叉簧片柔性铰链进行计算时，为了便于铰链柔度计算公式的推导，假设<sup>[12-14]</sup>：

- (1) 铰链的变形只发生在直梁部分，忽略其他部分的变形；
- (2) 将铰链等效成小变形悬臂梁；
- (3) 铰链一段固定，铰链的弯曲变形由力和弯矩产生，考虑轴向载荷的影响，忽略剪切和扭转的影响。

基于以上假设，铰链下平台完全固定，作用于转动平台的力分解为轴向载荷和纯弯矩，受力分析如图4所示。柔性铰链单一直梁受力情况简化为悬臂梁，如图5所示。

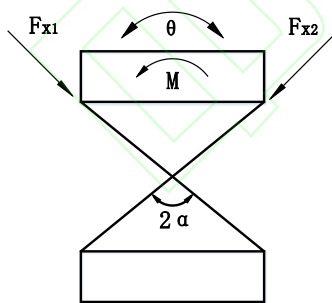


图4 铰链受力参数模型

Fig.4 Parameter model of the load of the hinge



图5 单一铰链受力分析图

Fig.5 Single hinge force analysis diagram

根据卡式第二定理，可得柔性铰链在1点的

变形量与载荷的关系为：

$$\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x-F_x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{y-F_y} & C_{y-M_z} \\ 0 & C_{\theta-F_y} & C_{\theta-M_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中： $F_{1x}$ 、 $F_{1y}$ 分别表示单一铰链在1处 $x$ 方向与 $y$ 向受力， $M_{1z}$ 表示单一铰链在1处绕 $z$ 轴弯矩。矩阵中的每个元素 $C_{i-j}$ 称为柔度因子。 $u_{1x}$ 表示1点在力 $F_{1x}$ 的作用下沿 $x$ 轴的微小线性位移， $u_{1y}$ 表示1点在力 $F_{1y}$ 的作用下沿 $y$ 轴的微小线性位移， $\theta_{1z}$ 表示1点在弯矩 $M_{1z}$ 的作用下绕 $z$ 轴的转角。

根据互等定理， $C_{\theta-F_y} = C_{y-M_z}$ ，并且对位移矢量应用卡式第二定理，有：

$$\begin{cases} u_{1x} = \frac{\partial U}{\partial F_{1x}} \\ u_{1y} = \frac{\partial U}{\partial F_{1y}} \\ \theta_{1z} = \frac{\partial U}{\partial M_{1z}} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $U$ 为材料的变形能，根据材料力学知识可知，变形能表达式：

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{F_x^2}{EA(x)} dx + \int \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right] \quad (4)$$

式中， $F_x = F_{1x}$ ； $M_z$ 为绕 $z$ 轴的力矩， $M_z = M_{1z} + F_{1y}(L-x)$ ； $E$ 为材料的弹性模量； $A(x)$ 为铰链的横截面面积， $A(x) = bh$ ； $I_z$ 为绕 $z$ 轴的转动惯量， $I_z = bh^3/12$ ； $h$ 为横截面上任意一点的厚度。

求得铰链的形变为：

$$\begin{cases} u_{1x} = \frac{\partial U}{\partial F_{1x}} = \frac{F_{x1} I_4}{Eb} \\ u_{1y} = \frac{\partial U}{\partial F_{1y}} = \frac{12}{Eb} (M_{1z} I_2 + F_{1y} I_3) \\ \theta_{1z} = \frac{\partial U}{\partial M_{1z}} = \frac{12}{Eb} (M_{1z} I_1 - F_{1y} I_2) \end{cases} \quad (5)$$

其中积分变量分比为：

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 &= \int_0^L \frac{1}{h^3} dx \\ I_2 &= \int_0^L \frac{x}{h^3} dx \\ I_3 &= \int_0^L \frac{x^2}{h^3} dx \\ I_4 &= \int_0^L \frac{1}{h} dx \end{aligned} \right. \quad (6)$$

结合公式(1)-(3)，求得交叉簧片柔性铰链各个柔度分别为：

$$\left\{ \begin{aligned} C_{x-F_x} &= \frac{L}{Ebh} \\ C_{y-M_z} &= \frac{6L^2}{Ebh^3} \\ C_{\theta-M_z} &= \frac{12L}{Ebh^3} \\ C_{y-F_y} &= \frac{4L^3}{Ebh^3} \\ C_{\theta-F_y} &= C_{y-M_z} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

### 1.3 交叉簧片柔性铰链刚度的计算与分析

柔性铰链在 z 轴方向上受力 F，如图 6 所示。力 F 作用在铰链的末端，其中  $\theta$  为铰链单一轴与竖直方向的夹角， $\theta = 45^\circ$ 。F<sub>1</sub> 与 F<sub>2</sub> 分别为沿铰链方向和垂直于铰链的分力， $F_1 = F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} F$ 。M 为铰链所受弯矩，铰链所受最大弯矩为  $M = F_2 L$ 。

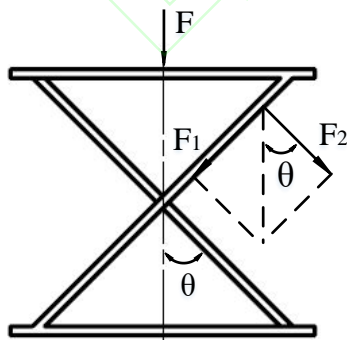


图 6 铰链在 z 轴方向受力示意图

Fig.6 Schematic diagram of the load of the hinge in the z-axis direction

柔性铰链在 Z 方向的总位移可以由下式进行计算：

$$\begin{aligned} Z &= F_{1x} C_{x-F_x} \sin \theta + F_{1y} C_{y-F_y} \cos \theta + \\ &M_{1z} C_{y-M_z} \end{aligned} \quad (8)$$

由公式  $K = F_z / Z$  可得，铰链在 z 轴方向的刚度为：

$$K_z = \frac{4Ebh^3}{Lh^2 + 4L^3 + 6\sqrt{2}L^3} \quad (9)$$

铰链在受力 F<sub>z</sub> 的情况下，可以由公式 1 计算转动角度  $\theta_{1z}$  为：

$$\theta_{1z} = C_{\theta-F_y} F_{1y} + C_{\theta-M_z} M_{1z} \quad (10)$$

由公式  $K_M = M / \theta_{1z}$  可得，柔性铰链在转动方向的刚度为：

$$K_M = \frac{Ebh^3}{9L} \quad (11)$$

分析公式(9)、(11)可知，铰链轴向刚度  $K_z$  与转动刚度  $K_M$  与 E、b 成正比，其他铰链结构参 h、L 均影响铰链的柔度性能，且其影响关系较为复杂。现利用 Matlab 对铰链刚度进行计算，分别分析轴向刚度  $K_z$ 、转动刚度  $K_M$  与 h、L 之间的关系。做出轴向刚度  $K_z$ 、转动刚度  $K_M$  与 (L、h) 的关系图，图 7 为交叉簧片柔性铰链轴向刚度 K 随设计参数 L、h 的变化关系，图 8 为交叉簧片柔性铰链转动刚度  $K_M$  随设计参数 L、h 的变化关系。

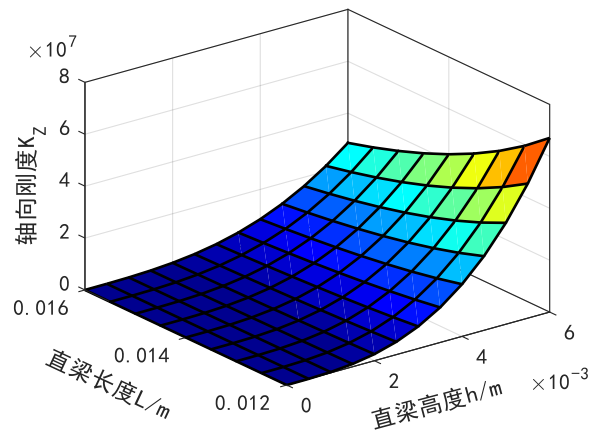


图 7 交叉簧片柔性铰链轴向刚度  $K_z$  随设计参数 L 和 h 的变化关系

Fig.7 The relationship between the axial stiffness  $K_z$  of the cross-spring flexural hinge with design parameters L and h

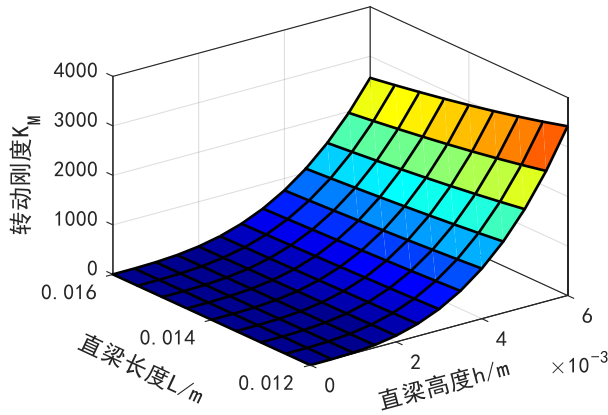


图8 交叉簧片柔性铰链转动刚度  $K_M$  随设计参数  $L$  和  $h$  的变化关系

Fig.8 The relationship between rotational stiffness  $K_M$  of the cross-spring flexural hinge with design parameters  $L$  and  $h$

根据图 7、图 8 的变化关系可知,对于铰链的轴向刚度  $K$ , 在  $E$ 、 $h$  一定的情况下, 随着  $L$  的减小,  $h$  的增大而增大, 且随  $h$  的变化较快; 对于转动刚度  $K_M$ , 在  $E$ 、 $b$  一定的情况下, 随着  $L$  的减小,  $h$  的增大而增大, 且随  $h$  的变化较快。

## 2 交叉簧片型柔性铰链实例设计

为寻找能满足主镜组件特殊要求且具有最佳性能的柔性铰链设计, 需要寻找  $h$ ,  $b$ ,  $L$  最佳值。根据金属材料性能手册, TC4(Ti-6Al-4V)具有强度高、密度小、比刚度高、低膨胀系数且机械性能好等优点, 因此材料选择钛合金 TC4, 其弹性模量为 106820MPa, 泊松比为 0.34, 许用应力为 895MPa。

为了考虑载荷对交叉簧片型柔性铰链的影响, 可以确定铰链在各个力作用下的应力为:

$$\sigma_a = \frac{Eh}{2L} \theta \quad (12)$$

$$\sigma_b = \frac{F_x}{hb} \quad (13)$$

则铰链所受总应力为:

$$\sigma = \frac{Eh}{2L} \theta + \frac{F_x}{hb} \quad (14)$$

Stuart T.Smith 对交叉簧片柔性铰链进行了计算<sup>[15]</sup>, 确定了铰链行程在梁长 10%以内时, 铰链所受极限轴向载荷为:

$$F_x = \frac{EI}{4L^2} = \frac{Eh^3b}{48L^2} \quad (15)$$

将式(15)带入式(14), 得到铰链最大转角  $\theta_{\max}$  与最大应力  $\sigma_{\max}$  的关系为:

$$\theta_{\max} = \frac{2L}{Eh} \sigma_{\max} - \frac{h}{24L} \quad (16)$$

令

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \quad (17)$$

将  $\theta_{\max} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ ,  $\sigma_{\max} = 895\text{MPa}$  带入式(16)

可以得到:

$$\varepsilon = 0.31 \quad (18)$$

保证铰链轴向刚度大于  $1.6 \times 10^7 \text{N/m}$ , 将  $\varepsilon = 0.31$  代入式(9)中, 可得

$$b \geq 15.8\text{mm} \quad (19)$$

又由于在光学组件中, 空心圆柱体尺寸受光学元件尺寸限制, 其中外径尺寸  $\phi = 73\text{mm}$ ,  $b \leq 16\text{mm}$ 。因此,

$$15.8\text{mm} \leq b \leq 16\text{mm}$$

保证铰链转动刚度大于  $1500\text{Nm/rad}$ , 将  $\varepsilon = 0.31$  代入式(11)中, 可得

$$bh^2 \leq 4.0768 \times 10^{-7} \quad (20)$$

可得,

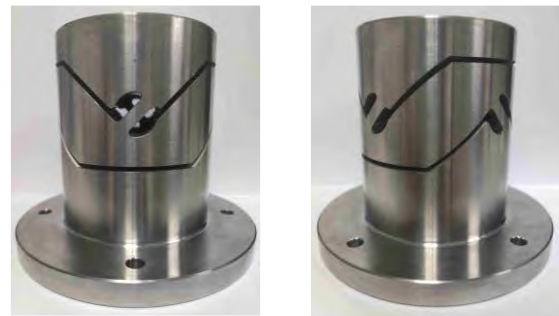
$$h \leq 5\text{mm} \quad (21)$$

由式(13)可知, 为保证正应力最小, 则  $b = 16\text{mm}$ ,  $h = 5\text{mm}$ , 此时  $L = 16.13\text{mm}$ , 为保证最大转角满足设计要求, 可令  $L = 16\text{mm}$ 。

至此, 决定交叉簧带柔性铰链的全部尺寸都已经确定, 并且能够满足设计要求。表 2 给出了实例设计的交叉簧带柔性铰链的尺寸参数, 交叉簧片柔性铰链实物如图 9 所示。

表 2 设计实例结构参数

Tab.2 Structure parameters of design case	
设计参数	数值
直梁长度 $L/\text{mm}$	16
直梁截面高度 $h/\text{mm}$	5
铰链壁厚 $b/\text{mm}$	16
转动刚度 $K/(\text{Nm/rad})$	1483.6
轴向刚度 $K_m/(\text{N/m})$	$1.66 \times 10^7$



(a) 正视图 (a) Front view  
(b) 侧视图 (b) Side view

图 9 交叉簧片柔性铰链实物

Fig.9 The prototype of cross-spring flexural hinge

### 3 实例验证与分析

#### 3.1 铰链刚度有限元数值分析

根据上述尺寸设计参数,利用 Patran/Nastran 软件对铰链进行有限元分析。为模拟交叉簧片柔性铰链的工作情况,有限元分析的约束条件为柔性铰链下平台施加 6 个自由度的约束,距离上平台中心 10mm 处施加转矩。分析得到铰链 Y 向最大位移为  $\Delta Z'$ ,代入公式<sup>[16]</sup>(22)可求得有限元计算转动刚度。施加转矩与有限元数值计算结果如表 3 所示。

$$K_M = \frac{M}{\theta} = \frac{M\phi}{2\Delta Z'} \quad (22)$$

其中: M 为施加的单位转矩,  $\phi = 73\text{mm}$  为交叉柔性铰链的外直径,  $\Delta Z'$  为边缘处 Y 向位移。

表 3 施加转矩与有限元数值计算结果

计算次数	施加转矩 <i>Nm</i>	转动角度 $\theta / (^\circ)$	转动刚度 <i>Nm / rad</i>
1	0.196	0.0069	1625.9
2	0.392	0.0138	1624.1
3	0.588	0.0207	1625.9
4	0.784	0.0276	1625.9
5	0.980	0.0347	1625.9
6	1.176	0.0414	1625.9
7	1.372	0.0484	1625.9
8	1.568	0.0553	1625.9
9	1.764	0.0622	1625.9
10	1.960	0.0691	1625.9
11	2.156	0.076	1625.9
12	2.352	0.0830	1622.8

#### 3.2 铰链转动刚度的测量

为了验证利用卡式第二定理方法设计交叉簧片柔性铰链的可行性,本文搭建如图 10 所示光学测试平台<sup>[16]</sup>,实验中所采用的柔性铰链为具有 2 正交方向的交叉簧片柔性环节的柔性铰链,即采用的是 4 个直梁周向布置的形式。具体实施方案如下:在扭转工装距离铰链轴线  $l = 0.1\text{m}$  处悬挂质量为 M 的砝码,其中砝码通过逐次增加 200g 的方式进行悬挂,砝码对铰链产生转矩,在转矩的作用下铰链发生变形,此时平面反射镜发生转动,利用经纬仪测量悬挂砝码前后平面镜角度变化量  $\alpha$ ,此角度偏差即为交叉簧片柔性铰链上平台在

转矩作用下的转动角度。

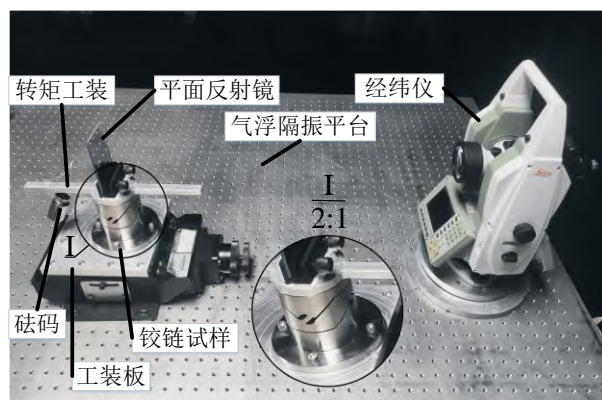


图 10 光学测量试验

Fig.10 The test of optical measurement

表 4 实验测量角度与转动刚度计算值

Tab.4 Experimentally measured angle and rotational stiffness value

测量次数	砝码质量 <i>M / g</i>	测量角度 $\alpha / (^\circ)$	转动刚度 <i>Nm / rad</i>
0	0	0.0829	—
1	200	0.0901	1559.8
2	400	0.0974	1549.4
3	600	0.1050	1523.3
4	800	0.1113	1581.8
5	1000	0.1191	1618.3
6	1200	0.1264	1549.1
7	1400	0.1338	1544.5
8	1600	0.1399	1576.3
9	1800	0.1478	1557.4
10	2000	0.1563	1530.0
11	2200	0.1629	1544.2
12	2400	0.1691	1563.5

利用公式(23)可以根据实验测量的转动角度求得转动刚度。实验测得铰链转动角度与转动刚度计算值如表 4 所示。

$$K_\theta = \frac{lM_G}{\alpha} \quad (23)$$

其中  $M_G$  为砝码重力,  $l$  为砝码与铰链轴线的直线距离,  $\alpha$  为平面镜角度变化量。

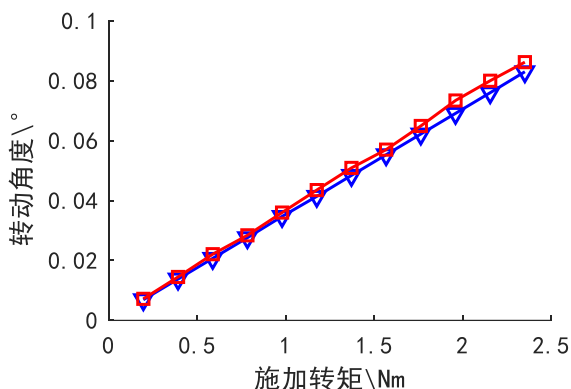


图 11 铰链转动角度的仿真值与实验值对比

Tab11 Comparison of simulated and experimental values of hinge rotation angle

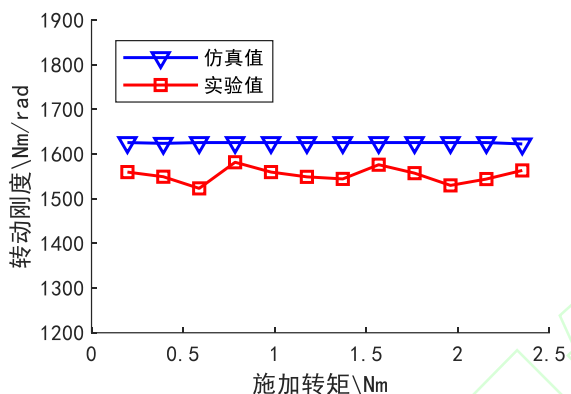


图 12 铰链转动刚度的仿真值与实验值对比

Tab12 Comparison of simulated and experimental values of hinge rotation stiffness

图 11、图 12 给出了施加不同转矩的情况下，转动角度与转动刚度的仿真结果与实验结果对比曲线。在不同转矩情况下，铰链转动角度 仿真值与实验值较为接近，最大误差为 6.33%，且实验测得转动角度均大于仿真计算所得到的转动角度；铰链转动刚度仿真值稳定在 1625.9Nm/rad，通过对比计算，实验值与仿真值最大误差为 6.31%，解析解、仿真值与实验值最大误差为 8.7%。该结果验证了利用卡式第二定理方法设计交叉簧片柔性铰链的可行性。

### 3.3 误差分析

铰链转动角度的仿真值与实验值最大误差为 6.33%，铰链转动刚度的解析解、仿真值和实验测量值三者最大误差为 8.7%，表明理论推导过程及其结果的准确性。虽然设计值、有限元数值计算与实验测量值一致性满足要求，但还是有必要对误差源进行分析。首先在对铰链转动刚度与轴向刚度求解过程中，建立铰链的悬臂梁等效模型基于一系列的假设，在实际中铰链变形过程较为复杂，因此这些假设引入了模型误差。其次，在有

限元计算过程中，有限元程序是将连续体进行离散近似来计算的，从而产生了离散误差；而且有限元网格近似程度、程序算法等也会引入误差。最后，在测量过程中由人眼判断经纬仪是否瞄准，引入了人为误差。

## 4 结论

根据精密光学仪器中对光学元件柔性支撑的要求，提出了一种交叉簧片型柔性铰链，利用卡式第二定理推导出铰链的转动刚度和轴向刚度，并分析了直梁长度  $L$ 、直梁高度  $h$  和空心圆柱壁厚  $b$  对刚度的影响，直梁高度  $h$  对铰链刚度影响最为显著。之后，根据工程需要进行实例设计，并对设计实例进行了有限元仿真。最后搭建光学测试平台，对该实例的转动角度和转动刚度进行测量。结果显示，转动角度的仿真值与实验值误差为 6.33%，转动刚度的解析解为 1483.6Nm/rad、有限元仿真值为 1625.9Nm/rad 和实验测量结果平均值为 1558.1Nm/rad，三者之间的最大误差为 8.7%，并对误差源从三个方面进行了分析。综上所述，卡式第二定理能快速、方便、准确的对交叉簧片柔性铰链进行设计，同时，交叉簧片柔性铰链为其他铰链的设计形式与方法提供了新的思路。

### 参考文献:

- [1] 赵磊, 巩岩. 直梁圆角型柔性铰链的回转精度分析[J]. 中国机械工程, 2013, 24(6): 715-720.  
ZHAO Lei, GONG Yan. Compliance Matrix Analysis of Corner-filletted Flexure Hinge[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(6): 715-720.
- [2] 李叶文. 空间大尺寸长条反射镜轻量化及其柔性支撑技术研究[D]. 长春: 中国科学院大学(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所), 2020.  
Li Yewen. Research on Lightweighting and Flexural Mounting Technology of Space-borne Large Size Rectangular Mirror [D]. Changchun: University of Chinese Academy of Sciences (Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences), 2020.
- [3] Wang R, Zhou X, Zhu Z, et al.. Development of a novel type of hybrid non-symmetric flexure hinges[J]. Review of Scientific Instruments, 2015, 86(8): 289-298.
- [4] Wang F, Huo Z, Liang C, et al.. A Novel Actuator-Internal Micro/Nano Positioning Stage with an Arch-Shape Bridge Type Amplifier[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018: 1-1.



- [5] Tuma T, Haerberle W, Rothuizen H, *et al.*. Dual-Stage Nanopositioning for High-Speed Scanning Probe Microscopy[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 19(3):1035-1045.
- [6] L.A. Goncalves Junior, R. Theska, H.A. Lepikson, *et al.*. Theoretical and experimental investigation of performance characteristics and design aspects of cross-spring pivots[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 185-186:240-256..
- [7] Markovic, K., Zelenika, S.. Characterization of cross-spring pivots for micropositioning applications[C]// Smart Sensors, Actuators, & Memos Vii & Cyber Physical Systems. *International Society for Optics and Photonics*, 2015:951727.
- [8] 刘浪,毕树生,杨春卫,等.交叉簧片柔性铰链的翘曲分析与消除[J].北京理工大学学报,2014,34(9):886-891..  
Liu Lang, Bi Shusheng, Yang Chunwei, *et al.*. Analysis and Elimination of the Cross-Spring Flexural Pivots's Warpage[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2014,34(9):886-891..
- [9] 杨淼,杜志江,陈依,等.变截面交叉簧片柔性铰链的力学建模与变形特性分析[J].机械工程学报,2018,54(13):73-78..  
Yang Miao, Du Zhijiang, Chen Yi, *et al.*. Static Modelling and Analysis of Cross-spring Flexure Pivots with Variable Cross-section[J].*Journal of Mechanical Engineering*, 2018,54(13):73-78..
- [10] 魏传新,陈洪达,尹达一.基于交叉簧片柔性铰链的空间微位移机构[J].光学精密工程,2015,23(11):3168-3175.  
WEI Chuanxin, CHEN Hongda, YIN Dayi, Spatial compliant micro-displacement magnifying mechanism based on cross-spring flexural pivot [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015,23(11):3168-3175.
- [11] An M, Zhang L, Xu S, *et al.*. Design, analysis, and testing of kinematic mount for astronomical observation instrument used in space camera[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2016, 87(11):1-18.
- [12] 王传礼,李成,何涛,等.椭圆导角混合柔性铰链的设计计算与性能分析[J].中国机械工程,2021,32(9):1017-1026.  
WANG Chuanli, LI Cheng, HE Tao, *et al.*. Design Calculation and Performance Analysis of Elliptical Corner-filletted Hybrid Flexure Hinges[J]. *China Mechanical Engineering*, 2021,32(9):1017-1026.
- [13] 张伟,杨立保,李清雅,等.直圆抛物线复合铰链柔度研究[J].红外与激光工程,2018,47(11):258-264.  
ZHANG Wei, YANG Libao, LI Qingya, *et al.*. Research on compliance of compound circular-parabolic hinges[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018,47(11):258-264.
- [14] Li H, Ding Y, Shi L, *et al.*. Mirror support structure with two mutually perpendicular single-axis circular flexure hinges[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013.
- [15] Smith, Stuart T. Flexures Elements of Elastic Mechanisms[M]. Boca Raron: CRC Press,2000:193-198.
- [16] 李宗轩,张雷,姚劲松,等.Cartwheel型双轴柔性铰链设计[J].光学精密工程,2013,21(9):2317-2325.  
LI Zongxuan, ZHANG Lei, YAO Jinsong, *et al.*. Design of Cartwheel bi-axial flexural hinge[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013,21(9):2317-2325.

作者简介:吴昊,男,1996年生,硕士研究生。主要研究方向为微纳光学遥感光机结构集成优化设计的研究。李宗轩(通信作者),男,1986年生,副研究员,博士研究生导师。E-mail: lizongxuan@ciomp.ac.cn。