

岭估计在稀疏孔径望远镜主镜姿态控制中的应用

曹海峰^{1,2}, 张景旭¹, 杨 飞^{1*}, 安其昌^{1,2}

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘 要: 研究了稀疏孔径镜面硬点与边缘传感器布局对稀疏孔径相对位姿控制精度的影响。利用离散孔径镜面几何特性, 建立了一个由 7 个圆形子孔径组成的主镜模型, 并推导了子孔径间相对位姿控制矩阵。鉴于控制矩阵条件数大这一特点, 采用广义最小二乘法求解, 引入岭估计并给出了控制矩阵误差函数上确界, 分析了 128 种边缘传感器与硬点布局以及几何距离对控制矩阵条件数的影响。仿真结果表明: 硬点和边缘传感器的几何布局与系数矩阵存在内在联系; 离散孔径相对位姿控制系数矩阵存在严重的复共线现象, 法矩阵出现严重病态; 硬点布局与改善系数矩阵病态性弱相关; 在硬点布局一定时, 增大相邻两边传感器间距, 控制矩阵条件数明显减小。针对控制矩阵病态问题, 采用岭估计通过选择合适岭参数病态特征得到了有效抑制, 该方法更能有效利用冗余的边缘传感器结构, 实现数据融合并保证测量系统的稳定可靠。

关键词: 主动光学; 位姿控制; 岭估计; 稀疏孔径

中图分类号: TH751 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0318003

Application of ridge regression in pose control of telescope primary mirror with sparse aperture

Cao Haifeng^{1,2}, Zhang Jingxu¹, Yang Fei^{1*}, An Qichang^{1,2}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The influence of the position of the sparse aperture mirror hard spot and the layout of the edge sensor on the precision of the relative pose control was studied. Using the geometry characteristic of sparse aperture, a primary mirror model composed of seven circular apertures was established and the control matrix of relative pose among apertures was derived. The generalized least squares method was used to solve this problem, considering the large condition number of control matrix, ridge regression was introduced and the intrinsic bound on the error function of the control matrix was also given. The possible 128 location strategies between edge sensors and hard spots and the effect of geometric distance on the condition number of control matrix were analyzed. The results show that the layout of the hard points and edge sensors is intrinsically linked to the coefficient matrix, the sparse aperture is serious Multi-Collinearity with respect to the coefficient matrix of pose control, and the normal matrix appears

收稿日期: 2018-10-10; 修订日期: 2018-11-20

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFE0102900); 国家自然科学基金(11673080)

作者简介: 曹海峰(1991-), 男, 博士生, 主要从事拼接镜面主动光学方面的研究。Email: caohf_ucas@163.com

导师简介: 张景旭(1966-), 男, 研究员, 博士, 主要从事大口径光电望远镜总体方面的研究。Email: zhangjx@ciomp.ac.cn

seriously ill-conditioned. The condition number of normal matrix are reduced significantly when the distances between the adjacent two edge sensors while the layout is fixed. For the ill-conditioned problem of the normal matrix, the ridge regression is used to effectively suppress the ill-conditioned characteristic by choosing appropriate ridge parameters. Using this method, the redundant edge sensor structure can be effectively used to realize data fusion and ensure the stability and reliability of the measurement system.

Key words: active optics; pose control; ridge regression; sparse aperture

0 引言

光学系统的极限分辨角与波长和主镜孔径有关,考虑到加工、制造、运输、装调等因素的限制,单镜的孔径不能无限增大,此时出现了光学合成孔径成像技术(如 GMT),为提高成像分辨率提供了新思路^[1]。为了达到理想的分辨率,需要设计合理的“硬点”定位系统约束子镜的六个自由度^[2]。在主动光学系统中,硬点不仅用于主镜定位,还可以将主镜的力和力矩反馈给控制系统,从而对主镜的面形调整起指导作用,以获得更好的成像质量^[3]。

轴向三个硬点一般呈正三角形分布约束子镜的 tip/tilt/piston 三个自由度,另外三个自由度由径向约束,子镜采用液压/气压 whiffle-tree 支撑方案时,称之为虚拟硬点^[4]。

主镜镜面经过光学校准达到共焦/共相后,在观测时受到风载、热、震动、重力影响,反射镜相对位姿和面形会发生变化。主镜通过边缘传感器和位移促动器及控制系统保持面形精度^[5-8],由边缘传感器观测值反解出硬点或虚拟硬点的位置,进而确定子镜位姿;利用硬点定位机构的结构参数解算出三个硬点的补偿量,通过执行机构将子镜调整到观测要求的位姿。

最小二乘估计为上述问题经典解法^[9-10],虽然其在无偏估计中方差最小,但其均方误差却很大,导致参数估值的准确度和稳定性大大降低。针对这一问题,学者提出了以岭估计、广义岭估计、主成分估计、stein 压缩估计、阻尼最小二乘法等为代表的有偏估计^[11-14]。1970 年,Hoerl 和 Kennard 首次提出了岭回归方法^[15],戴俭华和王石青证明了岭估计优于最小二乘估计的条件^[16],马朝忠等提出了 Gauss-Markov 模型的广义抗差岭估计方法^[17]。

文中以 GMT 型主镜为例,建立了可拓展式主镜

主动光学控制模型,通过推导得出在归一化误差圆中,岭估计的误差期望低于最小二乘估计,即最小二乘法显著性的缺失程度已经大于其无偏性带来的算法精度的结论。分析了不同硬点布局下边缘传感器间距对子镜位姿控制矩阵条件数的影响,分析了系数矩阵病态的几何和物理机制,结果表明:文中所研究的岭估计方法能有效抑制稀疏孔径主镜主动光学控制模型的病态程度,提高了控制精度和稳定性。

1 主镜姿态控制模型分析

1.1 控制模型的几何学原理^[18]

假设子镜 1(M1)和子镜 2(M2)相邻处的传感器坐标为 (ζ, η) ,经过校准后子镜的三个硬点坐标为 $P_i(x_i, y_i, 0)(i=1, 2, 3)$,发生扰动之后三个硬点坐标为 $P_i(x_i, y_i, z_i)$,对于 M1 平面上一点 $P(u, v, z)$ 有:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - u & y_1 - v & z_1 \\ x_2 - u & y_2 - v & z_2 \\ x_3 - u & y_3 - v & z_3 \end{vmatrix}}{(S_1 z_1 - S_2 z_2 + S_3 z_3)/S_0} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{(S_1 z_1 - S_2 z_2 + S_3 z_3)/S_0} \quad (1)$$

式中: $S_i(i=0, 1, 2, 3)$ 分别为三角形 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 、 $\Delta S P_2 P_3$ 、 $\Delta S P_1 P_3$ 、 $\Delta S P_1 P_2$ 的面积。

假设子孔径的半径为 r ,相邻两子孔径中心距为 $\sqrt{3}d_0$ (其中, $\sqrt{3}d_0 > 2r$, d_0 为常数),三个硬点组成的正三角形边长为 a ,相邻的两个传感器在两子孔径中心连线中垂线方向的距离为 d 。为了避免传感器读数对硬点的移动不敏感增加约束,令:

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2}d_0 - \frac{2}{3}a \right| \leq d \leq \left| \frac{\sqrt{3}}{2}d_0 + \frac{2}{3}a \right| \quad (2)$$

如图 1 所示(Circ1 和 Circ9 为虚拟子孔径),边缘传感器 S 和 S' 处的高度分别为:

$$z_s = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + Q_3 z_3, z_{s'} = Q_1 z_1 + Q_3 z_2 + Q_2 z_3$$

$$Q_1 = \frac{1}{3} + \frac{d - d_0}{2a}, Q_2 = \frac{1}{3} + \frac{d + d_0}{2a}, Q_3 = \frac{1}{3} + \frac{d_0}{a}$$

同样地,可以得到与其相邻子镜平面上在 S 和 S' 位置处的高度:

$$z_s = R_1 z_1 + R_2 z_2 + R_3 z_3, z_{s'} = R_1 z_1 + R_3 z_2 + R_2 z_3$$

$$R_1 = \frac{1}{3} - \frac{d_0}{a}, R_2 = \frac{1}{3} - \frac{d+d_0}{2a}, R_3 = \frac{1}{3} + \frac{d+d_0}{2a}$$

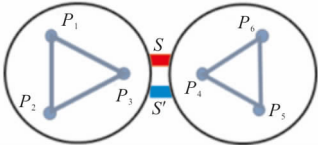
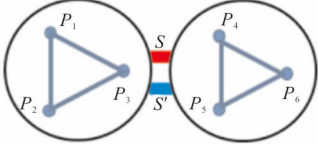
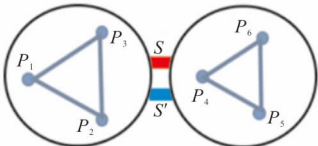
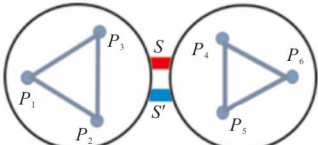
定义传感器读数为相邻两个拼接镜在传感器位置的高度偏差,则有:

$$s = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 + C_6 z_6 \quad (3)$$

相邻两个子镜的硬点布局与边缘传感器读数 s 中系数 C_i 的关系如表 1 所示。

表 1 子孔径硬点的排布与 C_i 的关系

Tab.1 Relationship between the layout of hard points in sub-apertures and C_i

Number	Type	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Edge sensor
1		Q_1	Q_2	Q_3	Q_3	Q_2	Q_1	S
		Q_2	Q_1	Q_3	Q_3	Q_1	Q_2	S'
2		Q_1	Q_2	Q_3	R_3	R_2	R_1	S
		Q_2	Q_1	Q_3	R_2	R_3	R_1	S'
3		R_1	R_2	R_3	Q_3	Q_2	Q_1	S
		R_1	R_3	R_2	Q_3	Q_1	Q_2	S'
4		R_1	R_2	R_3	R_3	R_2	R_1	S
		R_1	R_3	R_2	R_2	R_3	R_1	S'

假设经过共焦、共相调整后,边缘传感器的初始读数均为 0,发生风载、热、重力扰动之后的边缘传感器读数变为 s_i 和 s_i' ,相应的硬点的高度为 p_i ($i=1, \dots, 27$),并假设所有边缘传感器测量噪声水平一致,令 $P=(p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{27})^T_{27 \times 1}$ 。

1.2 建立不同硬点布局下的控制矩阵

图 1 所示模型中边缘传感器按照位置不同可以分为三类,如表 1 和图 1 所示。约定边缘传感器读数 s_{ijk} 中 i 表示边缘传感器所处的位置类型, j,k 分别表示边缘传感器所处位置的行、列数。结合图 1 和表 1 可以得出第一类边缘传感器的控制矩阵:

$$\begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (4)$$

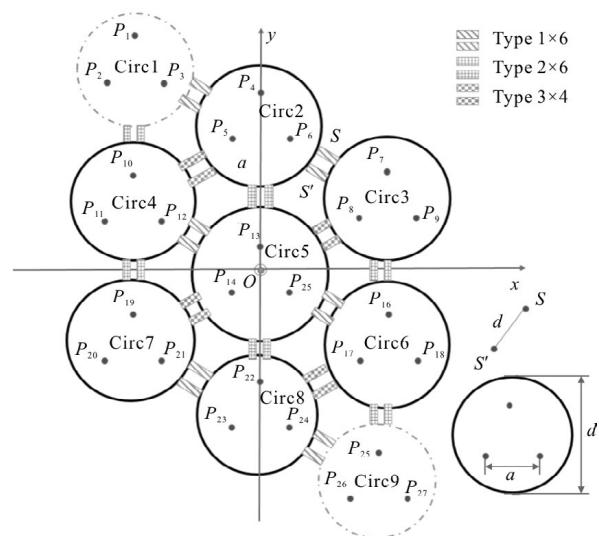


图 1 边缘传感器位置与虚拟硬点排布位置示意图

Fig.1 Schematic diagram of position of edge sensors and layout of virtual hard points

即:

$$A_{\text{type1}} P = S_{\text{type1}} \quad (5)$$

其中, $P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_{27})^T$, $S_{\text{type1}} = (s_{111} \ s_{112} \ s_{121} \ s_{122} \ s_{131} \ s_{132})_{6 \times 1}^T$, $A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_3 & R_2 & R_1 \\ & Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_3 & R_2 & R_1 \end{bmatrix}_{2 \times 9}^T$ 。

同理, 可以得到第二类位置边缘传感器控制矩阵:

$$\begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ & M_1 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

即

$$A_{\text{type2}} P = S_{\text{type2}} \quad (7)$$

其中,

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & & & \\ & R_1 & R_2 & R_3 & & \\ & & R_1 & R_2 & R_3 & \\ & & & R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}_{3 \times 9}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} Q_3 & Q_2 & Q_2 & & & \\ & Q_3 & Q_2 & Q_2 & & \\ & & Q_3 & Q_2 & Q_2 & \\ & & & Q_3 & Q_2 & Q_2 \end{bmatrix}_{3 \times 9}$$

$$S_{\text{type2}} = (s_{211} \ s_{212} \ s_{213} \ s_{221} \ s_{222} \ s_{223})_{6 \times 1}^T$$

同样地, 第三类位置边缘传感器控制矩阵可以表示为:

$$\begin{bmatrix} M_2 & N_2 \\ & M_2 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_7 \\ S_8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

即

$$A_{\text{type3}} P = S_{\text{type3}} \quad (9)$$

其中,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_2 & Q_3 & Q_1 \\ & & & Q_2 & Q_3 & Q_1 \end{bmatrix}_{2 \times 9}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} R_2 & R_1 & R_3 & & & \\ & R_2 & R_1 & R_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 9}$$

$$S_{\text{type3}} = (s_{311} \ s_{312} \ s_{321} \ s_{322})_{4 \times 1}^T$$

利用上述方法可以建立拼稀疏子孔径相对位姿的控制矩阵, 结合以上各式可以得到:

$$\begin{bmatrix} A_{\text{type1}} & A_{\text{type2}} & A_{\text{type3}} \end{bmatrix}^T P = \begin{bmatrix} S_{\text{type1}} & S_{\text{type2}} & S_{\text{type3}} \end{bmatrix}^T$$

即

$$A_0 P = S_0 \quad (10)$$

利用表 1 中对应的字母代换, 可得与边缘传感器 S 相邻位置边缘传感器 S' 的控制矩阵:

$$A_0' P = S_0' \quad (11)$$

将公式(19)、(20)组合可以得到控制矩阵的简化形式:

$$AP = S \quad (12)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} A_0' & A_0'^T \end{bmatrix}_{32 \times 27}^T, S = \begin{bmatrix} S_0^T & S_0'^T \end{bmatrix}_{32 \times 1}^T$$

由于边缘传感器测量数据冗余, 经典算法采用最小二乘法求解, 即:

$$A^T AP = A^T S, \hat{P} = (A^T A)^{-1} A^T S \quad (13)$$

其中,

$$A^T A = \begin{bmatrix} A_0^T & A_0^T + A_0'^T & A_0'^T \end{bmatrix}_{27 \times 27}$$

$$A^T S = \begin{bmatrix} A_0^T S_0 + A_0'^T S_0' \end{bmatrix}_{27 \times 1}$$

考虑到:

$$A_0^T = \begin{bmatrix} A_0^T & M_1^T & M_2^T \\ A^T & N_1^T & N_2^T \\ A^T & N_1^T & N_2^T \end{bmatrix}_{27 \times 16}$$

可以得到:

$$A_0^T A_0 = \begin{bmatrix} K_1 & W \\ W^T & K_2 & W \\ & W^T & K_3 \end{bmatrix}_{27 \times 27} \quad (14)$$

其中,

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & B \\ B^T & K_{12} & B \\ & B^T & K_{13} \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} K_{21} & B \\ B^T & K_{22} & B \\ & B^T & K_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} K_{31} & B \\ B^T & K_{32} & B \\ & B^T & K_{33} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 & W_1 \\ & W_2 & W_1 \end{bmatrix}$$

令

$$R_\gamma = [-R_2 \ R_1 \ R_3], Q_\alpha = [Q_3 \ Q_2 \ -Q_1]$$

$$Q_{\beta}=[-Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3], \quad Q_{\gamma}=[Q_2 \quad -Q_1 \quad Q_3]$$

则有:

$$\begin{aligned} K_{11} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} \\ K_{12} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + R_{\gamma}^T R_{\gamma} + Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} \\ K_{13} &= R_{\gamma}^T R_{\gamma} + Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} \\ K_{21} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + R_{\beta}^T R_{\beta} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} + Q_{\gamma}^T Q_{\gamma} \\ K_{22} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + R_{\beta}^T R_{\beta} + R_{\gamma}^T R_{\gamma} + Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} + Q_{\gamma}^T Q_{\gamma} \\ K_{23} &= R_{\beta}^T R_{\beta} + R_{\gamma}^T R_{\gamma} + Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} \\ K_{31} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + R_{\beta}^T R_{\beta} + Q_{\gamma}^T Q_{\gamma} \\ K_{32} &= R_{\alpha}^T R_{\alpha} + R_{\beta}^T R_{\beta} + Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\gamma}^T Q_{\gamma} \\ K_{33} &= Q_{\alpha}^T Q_{\alpha} + Q_{\beta}^T Q_{\beta} \\ B &= R_{\alpha}^T Q_{\alpha} \\ W_1 &= Q_{\gamma}^T R_{\beta} \\ W_2 &= R_{\gamma}^T Q_{\gamma} \end{aligned}$$

通过基本元素替换(将 d 换为 $-d$),可以得到 $A_0'^T$, 然后可以得到:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} A_0^T A_0 + A_0'^T A_0' \end{bmatrix}_{27 \times 27} \\ A_0^T S_0 &= A_{\text{type1}}^T S_{\text{type1}} + A_{\text{type2}}^T S_{\text{type2}} + A_{\text{type3}}^T S_{\text{type3}} \\ A_0^T S_0 &= \begin{bmatrix} A^T S_1 + M_1^T S_4 + M_2^T S_6 \\ A^T S_2 + N_1^T S_4 + M_1^T S_5 + N_2^T S_6 + M_2^T S_7 \\ A^T S_3 + N_1^T S_5 + N_2^T S_7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

将 $A_0^T S_0$ 中的 S 换为 S' 并将系数矩阵相应的字母代换便可以方便地得出 $A_0'^T S_0'$, 通过组合可得:

$$A_0^T S_0 = \begin{bmatrix} A_0^T S_0 + A_0'^T S_0' \end{bmatrix}_{27 \times 1} \quad (16)$$

子孔径间相对位姿的控制属于冗余控制, 选择合适的超定方程组求解方式可以提升对子孔径间相对位姿的控制精度。影响控制方程系数矩阵的因素主要有系统参数和测量位置。不同的系统参数会影响系数矩阵的秩、条件数等特征, 从而影响控制精度。当系数矩阵的条件数大到一定数值时, 测量结果发生微小抖动便会引起促动器调整量出现较大的波动, 此时问题出现病态。针对病态问题, 提出用岭估计方法来克服最小二乘的病态性, 它是一种在

均方误差意义下优于最小二乘估计的有偏估计方法。

2 岭估计应用于稀疏孔径望远镜主镜姿态控制

2.1 岭估计原理

为了充分有效地利用观测数据, 如何处理含有各种测量误差的观测数据极其重要, 在测量数据处理中, 最常用的是 Gauss-Markov 模型^[19]。

函数模型: $S^* = A^* P^* + \Delta^*$

$$\text{随机模型: } \begin{cases} E(\Delta^*) = 0 \\ \Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 W^{*-1} \end{cases}$$

式中: Δ^* 为测量误差; Σ 为 Δ^* 或 S^* 的协方差矩阵; Q 为协因数阵; 广义测量矩阵 $S^* = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}$; 广义系数矩阵 $A^* =$

$$A^* \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\varepsilon} I \end{bmatrix}; \text{广义权矩阵 } W^* = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}。$$

函数模型的最小二乘解如公式(13)所示, 若系数矩阵中列向量线性关联度大, 法矩阵 $A^T A$ 条件数增大, 法矩阵呈现病态。法矩阵求逆出现不稳定, 考虑到观测噪声的影响, 采用最小二乘法得到的估计值将明显偏离真值。特别地, 当 $|A^T A| = 0$ 时, 最小二乘法彻底失效。为了解决最小二乘法这一缺点, 文中引入岭参数对法矩阵进行修正, 对结果进行岭估计。

根据 Tikhonov 正则化原理^[20], 相应的岭估计准则为:

$$\begin{aligned} \left\| A \hat{P} - S \right\|^2 + \varepsilon \Omega(\hat{P}) &= \left\| A \hat{P} - S \right\|^2 + \varepsilon \hat{P}^T \hat{P} = \\ \left\| A \hat{P} - S \right\|^2 + \varepsilon \left\| \hat{P} \right\|^2 &= \min \end{aligned}$$

由此得到的岭估计解为:

$$\hat{P}_R = (A^T A + \varepsilon I)^{-1} A^T S \quad (17)$$

式中: $\varepsilon (\varepsilon \geq 0)$ 为岭参数; $\Omega(\hat{P})$ 为稳定泛函。

得到广义岭估计解为:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{GR}^* &= (A^{*T} W^* A^*)^{-1} (A^*)^T W^* S^* = \\ &= (A^T W A + \varepsilon I)^{-1} A^T W S = \\ &= (Q^T \Lambda Q + Q^T \varepsilon Q)^{-1} A^T W S = \\ &= Q(\Lambda + \varepsilon I)^{-1} Q^T A^T W S \end{aligned} \quad (18)$$

与公式(13)相比, 公式(17)求逆的部分增加了 εI

项,法矩阵 $A^T A$ 的病态性得到抑制,新的法矩阵求逆正常,因而可得到可靠的估计值。

将测量矩阵 S 的期望值 $E(S)$ 代入公式(18)可得岭估计解的期望为:

$$\begin{aligned} E(\hat{P}_{GR}^*) &= Q(\Lambda + \varepsilon I)^{-1} Q^T A^T W E(S) = \\ &= Q(\Lambda + \varepsilon I)^{-1} Q^T A^T W A P = \\ &= Q(\Lambda + \varepsilon I)^{-1} Q^T Q \Lambda Q^T P = \\ &= Q(\Lambda + \varepsilon I)^{-1} \Lambda Q^T P = \\ &= Q \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \varepsilon} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \varepsilon} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \varepsilon} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \varepsilon} \end{bmatrix} Q^T P \quad (19) \end{aligned}$$

根据数学知识,可以得到:

$$\text{bias}(\hat{P}) = -\varepsilon Q \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + \varepsilon} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 + \varepsilon} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_1 + \varepsilon} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{trace} \left\{ \left[\text{bias}(\hat{P}) \right]^T \left[\text{bias}(\hat{P}) \right] \right\} &= \\ &= \varepsilon^2 P^T \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda_1 + \varepsilon)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda_2 + \varepsilon)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\lambda_1 + \varepsilon)^2} \end{bmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

代入之前的误差公式之中,类比公式 $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B(C^{-1} + DA^{-1} B)^{-1} DA^{-1}$ 可以得到:

$$\begin{aligned} (A^T W A + \varepsilon I)^{-1} &= (A^T W A)^{-1} - (A^T W A)^{-1} \times \\ &\times \left[\varepsilon^{-1} I + (A^T W A)^{-1} \right]^{-1} (A^T W A)^{-1} \quad (22) \\ \sigma_0^2 \text{trace} \left[(A^* W^* A^*)^{-1} \right] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 \text{trace} \left(\left[\frac{A}{\sqrt{\varepsilon} I} \right]^T W^{*T \frac{1}{2}} W^* W^{* \frac{1}{2}} \left[\frac{A}{\sqrt{\varepsilon} I} \right] \right) &= \\ \sigma_0^2 \text{trace} \left[(A^T W A + \varepsilon I)^{-1} \right] &= \\ \sigma_0^2 \text{trace} \left\{ \left[Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) Q^T + \varepsilon Q Q^T \right]^{-1} \right\} &= \\ \sigma_0^2 \text{trace} \left\{ \left[Q \text{diag}(\lambda_1 + k, \lambda_2 + k, \cdots, \lambda_l + \varepsilon) Q^T \right]^{-1} \right\} &= \\ \sigma_0^2 \sum_{i=0}^l \frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} \quad (23) \end{aligned}$$

均方误差:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{P}_{GR}^*) &= \sigma_0^2 \sum_{i=0}^l \frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} + \\ &+ k^2 P^T \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda_1 + \varepsilon)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda_2 + \varepsilon)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\lambda_l + \varepsilon)^2} \end{bmatrix} \approx \\ &= \sigma_0^2 \frac{t}{\varepsilon} + P^T P \leq \sigma_0^2 \sum_{i=0}^l \frac{1}{\lambda_i} = \\ &= \sigma_0^2 \text{trace} \left[(A^T P A)^{-1} \right] = \text{MSE}(\hat{P}_{LS}) \quad (24) \end{aligned}$$

式中: $\text{MSE}(\hat{P}_{LS})$ 为具有无偏特性的普通最小二乘估计的均方误差。 λ_i 为系数矩阵 $A^T P A$ 的特征值。

$$\frac{\|P\|_2^2}{\sigma_0^2} \leq \sum_{i=0}^l \frac{\varepsilon - \lambda_i}{\varepsilon \lambda_i} \quad (25)$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 为 L_2 范数,通过以上公式可以得到,在归一化误差圆中,岭估计的误差期望低于最小二乘估计,即最小二乘法显著性的缺失程度已经大于其无偏性带来的算法精度,采用岭估计更能有效利用冗余的边缘传感器结构,实现数据融合并保证测量系统的稳定可靠。

2.2 岭参数的选择

基于最小二乘准则的病态问题岭估计中,关于岭参数的选择方法主要有:岭迹法、广义交叉核实法(GCV)、 L 曲线法、两步解法、双 h 公式法^[21]。GCV 方法理论性强,但是最优岭参数的选取依赖于 GCV 函数变化的曲率,当 GCV 函数变化过于平缓,此时确定其最小值较难。 L 曲线法是通过确定 L 曲线上曲

率最大点儿选取相应的岭参数值,但是缺乏有力的理论基础。两步法解法和双 h 公式法理论性强,但是求解相对繁琐。文中选择目前应用最广泛的岭迹法确定岭参数,如图 2 所示,当岭参数大于 800,法矩阵的条件数基本不变,故取岭参数 $\varepsilon=800$ 。

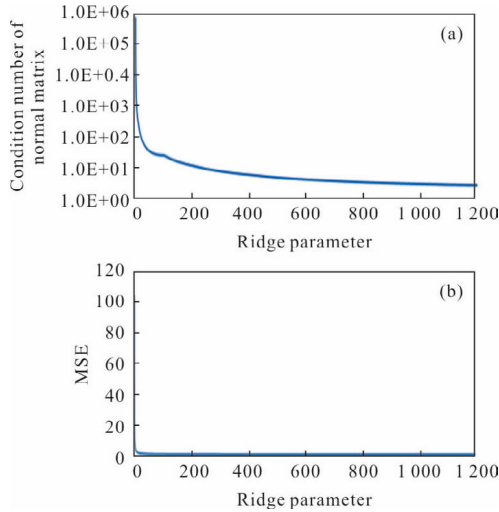


图 2 岭参数对法矩阵条件数和均方误差的影响

Fig.2 Effect of ridge parameter on the condition number of normal matrix and MSE

3 不同布局下的控制仿真

为了验证该方法对求解冗余主镜控制方程的有效性,探索虚拟硬点排布及边缘传感器对控制矩阵的影响,建立如下目标函数:

$$\min \sum_{i=0}^t \frac{1}{\lambda_i + \varepsilon}$$

$$\text{s.t. } C=[c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8], (c_i=0, 1; i=2, \dots, 8) \quad (26)$$

$$D=d \times \Delta d, (n=0, 1, \dots, N; t \text{ is step size})$$

式中: c_i 为对应编号的拼接子镜虚拟硬点的排布状态,三角形尖朝上为 1,尖朝下为 0,共计 128 种布局,每一种布局可以表示为 C 矩阵的一个行向量 $C_{\text{row}i}$ 。

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{128 \times 7}$$

当取不同布局时,系数矩阵 A 便结合表 1 按照图 3 所示流程更新。

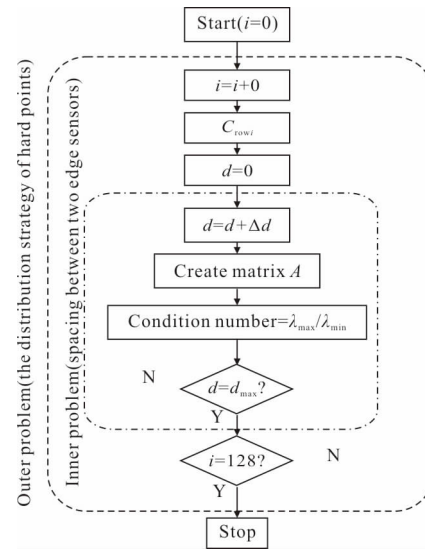


图 3 控制矩阵更新流程图

Fig.3 Flow chart of control matrix updating

其中, Δd 表示间距增加步长, d 表示间距步长增加次数,控制矩阵条件数与子镜硬点排布及边缘传感器间距的关系如图 4 所示,图中 x 轴为边缘传感器间距, y 轴表示虚拟硬点排布序列号, z 轴表示均方误差。图 5 为在 x 轴视角下选择不同岭参数时边缘传感器间距对 MSE 的影响。

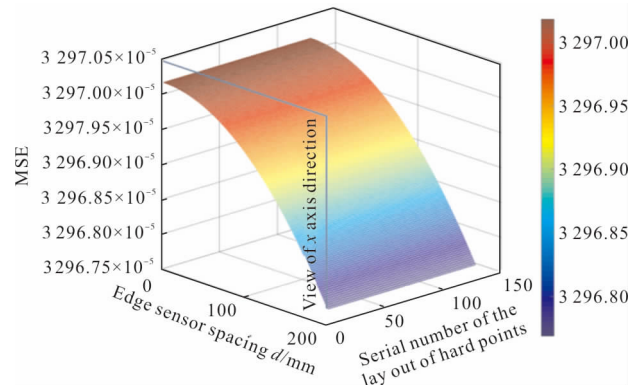
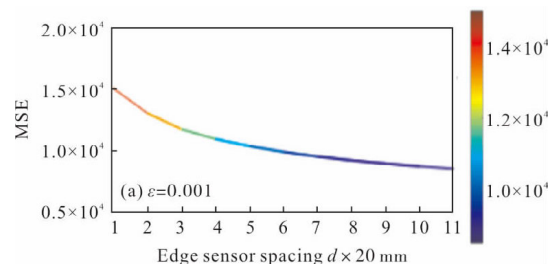


图 4 岭参数 ε 取 800 时法矩阵的条件数

Fig.4 Condition number of the normal matrix when the ridge parameter ε is taken as 800



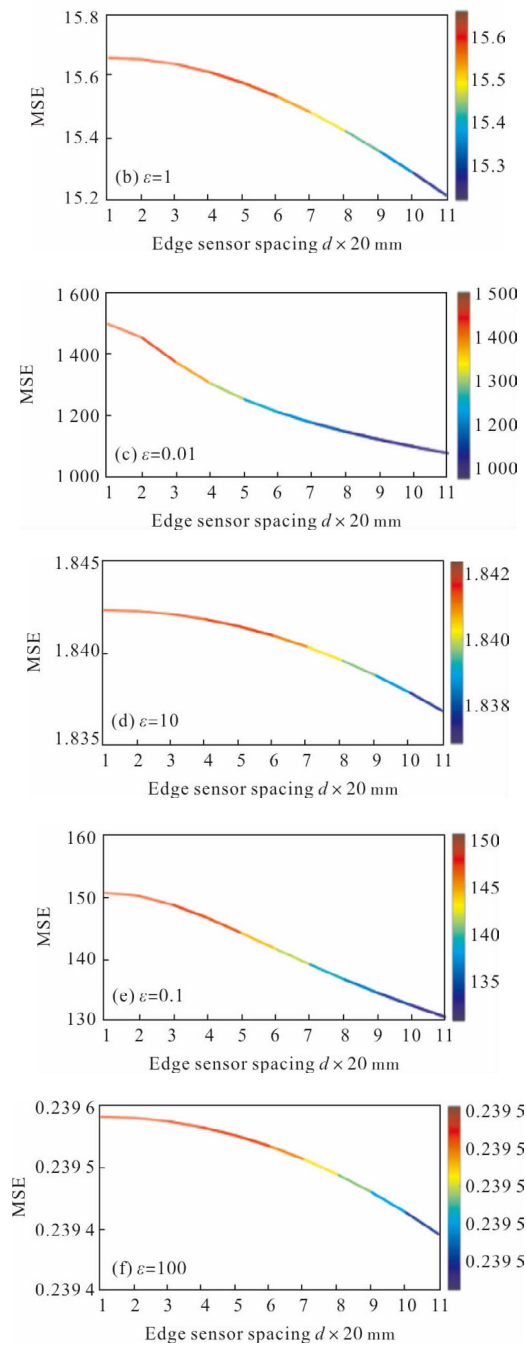


图 5 在 x 轴视角下选择不同岭参数时边缘传感器间距对 MSE 的影响

Fig.5 Effect of edge sensor spacing on MSE in different ridge parameters from x axis perspective

取 $\varepsilon=800$ 时, 目标函数公式(26)定义域内所有解的排序如图 6 所示, 从图中可以看出: 在边缘传感器间距不变的情况下, C 矩阵布局序列号数值越小所对应目标函数越小, 序列号为 1 的排序方案 $c_1(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 最优。

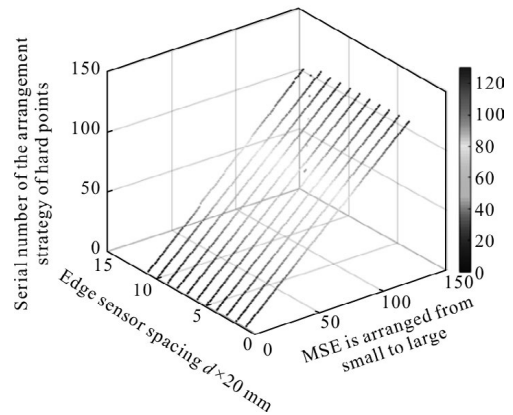


图 6 $\varepsilon=800$ 时不同边缘传感器间距情况下 128 种硬点布局对 MSE 的影响

Fig.6 Effect of 128 hard points arrangement strategies on MSE under different edge sensor intervals ($\varepsilon=800$)

4 分析与讨论

由图 2 可知, 在直接使用最小二乘法求解时控制矩阵病态程度严重, 采用岭估计之后法矩阵病态程度明显得到改善, 岭参数从 0.001 增大到 800 时, 法矩阵均方误差最大值从 $1.5e4$ 降至 0.033 1。虚拟硬点排布对控制方程法矩阵的病态程度基本无影响, 边缘传感器间距对法矩阵 MSE 影响较为显著, 随着边缘传感器间距增大, 法矩阵 MSE 明显降低, 控制矩阵病态程度得到较大程度的改善。

由上述分析可以得出以下结论:

- (1) 同一硬点布局下增大边缘传感器间距控制方程法矩阵的误差期望明显减小;
- (2) 在边缘传感器间距不变的情况下, 硬点排布与法矩阵误差期望值呈弱相关;
- (3) 排布序列对于控制矩阵误差期望的影响要远小于边缘传感器的间距对控制矩阵误差期望的影响。

从上述推导以及仿真结果可以看出: 传统的最小二乘法显著性的缺失程度已经大于其无偏性带来的算法精度, 采用岭估计更能有效利用冗余的边缘传感器结构, 实现数据融合并保证测量系统的稳定可靠。在硬点布局不变的情况下, 增大边缘传感器间距能够降低法矩阵条件数, 减小法矩阵病态程度, 这是因为增大边缘传感器距离会使系数矩阵不同行向量偏离程度加大, 一定程度上减轻了行向量之间的复共线程度。

5 结 论

文中以 GMT 型主镜主动光学模型为例,提出了可拓展式稀疏孔径主镜位姿控制矩阵构建方法,介绍了岭估计原理,推导得出在归一化误差圆中,岭估计的误差期望小于最小二乘估计。拼接镜面主动光学控制中的“病态”产生具有几何和物理双重影响机制:边缘传感器与硬点或虚拟硬点独特的几何布局造成系数矩阵复共线, $A^T A$ 接近非奇异,求解会很不稳定;在工程实际中,由于边缘传感器读数会受到温度、重力、震动等因素影响在一定程度上偏离真值,这造成了子孔径刚体位移求解波动较大,严重影响控制系统可靠性和稳定性。

通过理论计算和仿真实验验证,可以得到以下几点结论:

(1) 硬点布局对主动光学控制矩阵条件数的影响作用较小,在工程实践中可根据实际需要(从镜室结构设计或工艺性角度考虑)选择某一类较佳布局;

(2) 边缘传感器间距增大明显降低控制矩阵的条件数;

(3) 采用岭估计方法明显降低了系数矩阵条件数,这是因为严重复共线的系数矩阵奇异,行列式值接近 0,求逆后会出现无穷大的元素,观测值即使是微小的偏差便会造成促动器调整量出现较大的波动,而岭参数的引入使控制方程系数矩阵满秩,大大改善了控制矩阵病态程度。这表明了采用岭估计并增大边缘传感器间距在稀疏孔径主动光学中对提高控制精度和稳定性具有重要作用和应用价值,而硬点布局应从镜室结构设计或工艺性角度考虑选择某一类较佳布局,该文为其他类似工程实际提供了一种新的解决方案。

参考文献:

[1] Zhou Chenghao, Wang Zhile, Zhu Feng. Review on optical synthetic aperture imaging technique [J]. *Chinese Optics*, 2017, 10(1): 26–37. (in Chinese)
周程灏, 王治乐, 朱峰. 大口径光学合成孔径成像技术发展现状[J]. 中国光学, 2017, 10(1): 26–37.

[2] Fan Lei, Yang Hongbo, Zhang Jingxu, et al. Hardpoints defining structure for large aperture primary mirror [J].

Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(12): 3367–3371. (in Chinese)

范磊, 杨洪波, 张景旭, 等. 大口径反射镜轴向硬点定位 [J]. 红外与激光工程, 2012, 41(12): 3368–3371.

[3] Lan Bin, Wu Xiaoxia, Yang Hongbo, et al. Application of generalized least squares method in the calibration of active optics mode [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(6): 0617001. (in Chinese)

兰斌, 吴小霞, 杨洪波, 等. 广义最小二乘法在主动光学模式定标中的应用 [J]. 红外与激光工程, 2017, 46(6): 0617001.

[4] Peng Yao, Zhang Jingxu, Yang Fei, et al. Hardpoint location technique of large mirror based on active optics [J]. *Laser & Infrared*, 2016, 46(2): 139–143. (in Chinese)

彭尧, 张景旭, 杨飞, 等. 基于主动光学的大口径反射镜硬点定位技术[J]. 激光与红外, 2016, 46(2): 139–143.

[5] Gajjar H, Menzies J, Buckley D, et al. SALT: Active control of the primary mirror with inductive edge sensors [C]//SPIE, 2016, 9906: 990639.

[6] Wasmeier M, Hackl J, Leveque S. Inductive sensors based on embedded coil technology for nanometric inter-segment position sensing of the E-ELT [C]//SPIE, 2014, 9145: 91451R.

[7] Conan R, Bouchez A, Quiros - Pacheco F, et al. The GMT active optics control strategies [C]//SPIE, 2016, 9909: 99091T.

[8] Yang Dehua, Qi Yongjun, Zhu Zhendong, et al. Design and test of the active micro-motion mechanism for optical mirror segment [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2005, 13(2): 191–197. (in Chinese)

杨德华, 戚永军, 朱振东, 等. 光学拼接镜面微位移主动调节机构的设计和实测 [J]. 光学精密工程, 2005, 13(2): 191–197.

[9] Su Dingqiang, Cui Xiangqun. Active optics – key technology of the new generation telescopes [J]. *Progress in Astronomy*, 1999, 17(1): 1–14. (in Chinese)

苏定强, 崔向群. 主动光学—新一代大望远镜的关键技术 [J]. 天文学进展, 1999, 17(1): 1–14.

[10] Lin Xudong, Chen Tao, Wang Jianli, et al. Active optics figure control of segmented mirror [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2009, 17(1): 98–102. (in Chinese)

林旭东, 陈涛, 王建立, 等. 拼接镜的主动光学面形控制 [J]. 光学精密工程, 2009, 17(1): 98–102.

[11] Cui X Q, Su D Q, Li G P, et al. Experiment system of

- LAMOST active optics[C]//SPIE, 2004, 5489: 974–984.
- [12] Guo Wenyue, Yu Anzhu, Liu Haiyan, et al. Regularized total least squares used in remote sensing image positioning of optical line array [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(1): 236–242. (in Chinese)
郭文月, 余岸竹, 刘海砚, 等. 正则化总体最小二乘用于光学线阵遥感影像定位 [J]. 光学精密工程, 2017, 25(1): 236–242.
- [13] Li Lijuan, Zhao Yanhui, Lin Xuezhu. Application of WTLS in coordinate transformation of laser tracker [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(9): 2570–2577. (in Chinese)
李丽娟, 赵延辉, 林雪竹. 加权整体最小二乘在激光跟踪仪转站中的应用 [J]. 光学精密工程, 2015, 23(9): 2570–2577.
- [14] Mu Zhiya, Ai Hua, Fan Xiaohe, et al. Inference fringe image registration using total least square method [J]. *Chinese Optics*, 2016, 9(6): 625–632. (in Chinese)
穆治亚, 艾华, 樊孝贺, 等. 采用整体最小二乘法的条纹图配准方法 [J]. 中国光学, 2016, 9(6): 625–632. (in Chinese)
- [15] Hoerl A E, Kennard R W. Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems [J]. *Technometrics*, 2000, 42(1): 80–86.
- [16] Dai Jianhua, Wang Shiqing. The conditions of ridge estimation superior to the least squares estimation [J]. *Mathematical Statistics and Applied Probability*, 1994, 9(2): 53–57. (in Chinese)
戴俭华, 王石青. 岭估计优于最小二乘估计的条件 [J]. 数理统计与应用概率, 1994, 9(2): 53–57.
- [17] Ma Chaozhong, Du Yuanlu, Gui Qingming. Generalized robust ridge estimation in Gauss–Markov model [J]. *Henan Science*, 2012, 30(7): 823–824. (in Chinese)
马朝忠, 杜院录, 归庆明. Gauss–Markov 模型的广义抗差岭估计 [J]. 河南科学, 2012, 30(7): 823–824.
- [18] Zou W Y. Generalized figure–control algorithm for large segmented telescope mirrors [J]. *J Opt Soc Am A*, 2001, 18(3): 639–643.
- [19] Lu Tieding. Research on the total least squares and its applications in surveying data processing [D]. Wuhan: University of Wuhan, 2010. (in Chinese)
鲁铁定. 总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用 [D]. 武汉: 武汉大学, 2010.
- [20] Tikhonov A N, Goncharsky A V, Stepanov V V, et al. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems [M]. Berlin: Springer, 1995.
- [21] Huang Hailan, Niu Ben. Study on the determination of ridge parameters [J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2011, 36(4): 31–32. (in Chinese)
黄海兰, 牛犇. 岭参数确定的研究 [J]. 测绘科学, 2011, 36(4): 31–32.