

## 基于双波片的偏振调控和偏振测量技术

李亚红, 付跃刚, 贺文俊, 刘智颖\*

( 长春理工大学 光电工程学院, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 针对双波片偏振调控结构, 基于 *Stokes-Mueller* 矩阵偏振算法, 对双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片的偏振调控机理作了详尽的理论分析, 得出调控偏振态与双波片快轴方向之间的关系, 并追迹其在庞加莱球上的运动轨迹. 基于双波片调控结构搭建偏振测量系统, 根据入射和出射 *Stokes* 矢量构建了投影关系矩阵算法, 完成了待测元件 *Mueller* 矩阵的测量, 并分析了波片的快轴方向误差和位相延迟误差对 *Mueller* 矩阵测量结果以及对出射偏振态调控精度的影响. 分析结果表明: 波片的快轴方向误差控制在  $\pm 2^\circ$  内, 位相延迟误差不大于  $\lambda/300$  时, *Mueller* 矩阵的最大测量误差为 0.040 2, 波片自身误差对测量结果的影响可以忽略不计; 波片自身误差所引起的方位角误差小于 0.16 rad 时, 快轴方向误差引起的椭圆角误差最大不超过 0.032 rad, 位相延迟误差导致的椭圆角误差小于 0.015 rad, 且对偏振度无影响.

**关键词:** 双波片; *Stokes-Mueller* 矩阵; 偏振调控; 偏振测量; 投影关系矩阵

**中图分类号:** O436.3 **文献标识码:** A

## Polarization control and measurement technology using a biplate

LI Ya-Hong, FU Yue-Gang, HE Wen-Jun, LIU Zhi-Ying\*

( Institute of Opto-electronic Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

**Abstract:** Based on the Stokes-Mueller matrix polarization algorithm, the polarization control mechanism of a biplate that consists of double quarter wave-plates or double half wave-plates was analyzed in detail. We have derived the analytical relations between the modulated polarization state and the fast-axis direction for the biplate. The movement trajectory of modulated polarization state on the Poincaré sphere was obtained. Which helps us to propose a polarization control measurement system using a biplate to complete the measurement of the Mueller matrix based on the projection matrix algorithm for the incident and exiting Stokes vectors. The polarization control accuracy for the exiting Stokes vector was also analysed. For a biplate that the error along the fast axis direction is  $\pm 2^\circ$  and the retardance error is  $\lambda/300$ , the maximum measurement error of Mueller matrix is 0.040 2. When the azimuth error caused by the error of the biplate is less than 0.16 rad, the elliptic angle error caused by the fast axis direction is not more than 0.032 rad, the ellipsometry error caused by the retardance is less than 0.015 rad, and it has no influence on the degree of polarization.

**Key words:** biplate, Stokes-Mueller matrix, polarization control, polarization measurement, projection matrix

**PACS:** 07.60.Fs, 42.25.Ja

### 引言

作为偏振光学中一种重要的偏振调控结构, 双波片一般由两个单波片组成, 并根据实际工作需求,

由两种相同或不同的双折射晶体制作而成, 其作用可等效为一个快轴方向连续可调的零级波片或消色差波片. 目前, 在偏振光学中普遍使用的是  $1/4$  波片和  $1/2$  波片, 尽管利用  $1/4$  波片可以根据入射偏振

收稿日期: 2016-12-30, 修回日期: 2017-04-11

Received date: 2016-12-30, revised date: 2017-04-11

基金项目: 国家自然科学基金(11474037)

Foundation items: Supported by National Natural Science Foundation of China(11474037)

作者简介( Biography ): 李亚红( 1990- ), 女, 甘肃人, 博士研究生, 主要从事光学设计、偏振理论与应用等方面的研究. E-mail: irene1129@163.com

\* 通讯作者( Corresponding author ): E-mail: lzy@cust.edu.cn

光的偏振方位角与其快轴之间的夹角实现线偏振光和圆偏振光或椭圆偏振光之间的相互转换,利用  $1/2$  波片可以实现对入射偏振光偏振方位角的改变,但是无论  $1/4$  波片还是  $1/2$  波片都只能完成特定的偏振转换<sup>[1-3]</sup>. 相比于单波片,双波片结构突破了对偏振态只能进行特定偏振转换的局限性,可以实现对偏振态的任意调控,此突破对光刻投影物镜的偏振照明系统设计和对矢量光束的聚焦特性研究具有重要意义. 不仅如此,双波片结构还提高了设计制造的自由度,使其可以实现在近红外到深紫外宽光谱范围内获得均匀位相延迟,同时具有较高的温度稳定性. 此特点使双波片可应用于宽光谱偏振中,尤其是一些对温度有特定要求的光谱偏振测量,如天文太阳磁场光谱望远镜中的偏振测量系统.

常见的偏振测量方法有旋转波片法和偏振调制法. 目前国内椭圆仪大多采用的都是旋转波片法,相对于偏振调制法,测量时间较长. 无论采取何种偏振测量方法,波片的快轴方向误差和位相延迟误差,将直接影响其结果的准确性. 因此调制精度作为双波片的重要技术指标,一直以来都是研究人员关注的热点问题. 其中,李双等人基于  $1/4$  波片-复合双折射光楔-偏振片的空间偏振调制结构,对  $1/4$  波片的位相延迟误差对测量结果的影响做了仿真分析,并提出四光束校正方法,实现了将线偏振度的相对测量误差控制在  $0.5\%$  以内<sup>[4]</sup>. 此外,崔高增等人研究了双波片快轴方向误差对偏振调制的影响,提出一种测量双波片光轴偏差角度的方法<sup>[5]</sup>,对检测和提高双波片制造精度具有参考价值. 然而,在偏振调制测量中双波片的快轴方向误差和位相延迟误差二者对其测量结果和偏振调制结果的影响却始终从未被定量研究过.

针对现有工作中存在的不足,本文利用 Stokes-Mueller 矩阵偏振算法对双波片的偏振调控机理做了更为详尽的分析,推导了调制出射偏振态与双波片快轴方向之间的关系,并给出了当两波片快轴方向变化时,调制出射偏振态在庞加莱球上的运动轨迹. 利用双波片偏振调控结构,在实验室环境搭建了单色光入射的偏振测量光路,根据入射和出射 Stokes 矢量之间的投影关系,构建了投影关系矩阵算法,可以唯一确定待测元件的 Mueller 矩阵,即 16 个实数元素. 利用 MATLAB 辅助计算,求得待测元件的测量 Mueller 矩阵,并定量分析了波片的快轴方向误差和位相延迟误差对偏振调控和偏振测量的影响,充分验证了基于双波片偏振调制结构的偏振测

量系统的可行性.

## 1 偏振调控原理

在偏振光学或奇点光学中,对偏振态的任意调控发挥着重要作用. 大多数偏振元件都只能完成特定偏振态之间的转换,如偏振片只能获得完全偏振光, $1/4$  波片只能实现线偏振光与圆偏振光或椭圆偏振光之间的相互转换, $1/2$  波片只能对偏振态的方位角进行转换. 因此,本文提出双波片偏振调控机构,通过旋转改变两波片的快轴之间的夹角大小,即可实现对入射偏振态的任意调控.

相比于 Jones 矢量,Stokes 矢量不仅可以表示完全偏振光,也可以表示部分偏振光和非偏振光<sup>[6-7]</sup>. 某一时刻,空间一点处任意光束的偏振态均可采用 Stokes 矢量的表达形式,即:

$$\vec{S} = I_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \cdot \cos 2\varphi \cos 2\alpha \\ p \cdot \cos 2\varphi \sin 2\alpha \\ p \cdot \sin 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中  $I_0$  为光强, $p$  为偏振度, $\varphi$  为椭圆率角, $\alpha$  为方位角.

相对地,波片对入射偏振态的作用矩阵可以表达为 Mueller 矩阵的形式,即:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & \sin \phi \cos 2\theta \\ 0 & \sin \phi \sin 2\theta & -\sin \phi \cos 2\theta & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中  $\phi$  为位相延迟, $\theta$  为快轴方向与水平轴之间的夹角. 当  $\phi = \pi/2$  和  $\phi = \pi$  时,可得双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片的 Mueller 矩阵分别为:

$$M_{\text{双}1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A - B & C - D & -\sin 2\Delta\theta \sin 2\theta_2 \\ 0 & A + B & C + D & -\sin 2\theta_2 \sin 2\Delta\theta \\ 0 & -\sin 2\Delta\theta \sin 2\theta_1 & -\sin 2\theta_1 \sin 2\Delta\theta & -\cos 2\Delta\theta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$M_{\text{双}1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\Delta\theta & \sin 4\Delta\theta & 0 \\ 0 & -\sin 4\Delta\theta & \cos 4\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中  $A = \cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos 2\Delta\theta$ ,  $B = \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2$ ,  $C = \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2 \cos 2\Delta\theta$ ,  $D = \cos 2\theta_1 \sin 2\theta_2$ ,  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  为双波片快轴之间的夹角大小; $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为双波片

快轴方向与水平轴之间的夹角大小. 当  $\Delta\theta = 0$  时, 式(3)和式(4)可化简为:

$$M_{\text{双}1/4} = M_{\text{双}1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

由上式可知, 当  $\Delta\theta = 0$  时, 双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片对入射偏振光不产生任何作用, 这点不难证明: 由于  $1/4$  波片使线偏振光和圆偏振光或椭圆偏振光可以相互转换, 反之亦然.  $1/2$  波片只是对偏振方位角起旋转作用, 当双  $1/2$  波片的快轴之间的夹角为  $0$  时, 对偏振方位角不起任何作用. 因此, 快轴方向完全一致的双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片可以等效为理想的保偏器.

综上所述, 结合式(4), 不难发现: 从本质上讲, 双  $1/2$  波片的 Mueller 矩阵可以等效为旋转矩阵. 但是, 有一点必须说明: 相比于普通的偏振旋转器, 双  $1/2$  波片的旋转精度却是普通偏振旋转器的二倍. 在一些对光束质量要求较高的应用中, 如矢量光束的偏振特性<sup>[8-9]</sup>和光刻系统的偏振照明<sup>[10-11]</sup>等, 双波片对偏振态的精确调控发挥着极其重要的作用.

结合式(1)、式(3)和式(4), 可得任意偏振态入射到双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片后, 出射偏振态的 Stokes 矢量表达形式分别为:

$$\vec{S}_{\text{双}1/4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin 2\varphi \cos 2\theta_2 \sin 2\Delta\theta + \cos 2\varphi A \\ -\sin 2\varphi \sin 2\theta_2 \sin 2\Delta\theta + \cos 2\varphi B \\ -\sin 2\varphi \cos 2\Delta\theta - \cos 2\varphi \sin 2\Delta\theta C \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\vec{S}_{\text{双}1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\varphi \cos(2\alpha - 4\Delta\theta) \\ \cos 2\varphi \sin(2\alpha - 4\Delta\theta) \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中  $C = \cos(2\alpha - 2\theta_1)$ ,  $B = \sin 2\theta_2 \cos 2\Delta\theta \cos(2\alpha - 2\theta_1) + \cos 2\theta_2 \sin(2\alpha - 2\theta_1)$ ,  $A = \cos 2\theta_2 \cos 2\Delta\theta \cos(2\alpha - 2\theta_1) + \sin 2\theta_2 \sin(2\alpha - 2\theta_1)$ , 当  $\Delta\theta = 0$ , 代入上述式(6)和式(7), 化简结果均与式(1)相同, 与式(5)所得结论完全一致. 由式(6)可得, 双  $1/4$  波片的出射偏振态与两波片快轴方向的夹角有关, 且随着快轴方向的改变, 出射偏振态的椭圆率和方位角都随之改变; 对比式(1)和式(7)可以得出: 只有出射偏振态的方位角随着双  $1/2$  波片快轴方向的改变而改变.

## 2 偏振测量原理

基于上述双波片偏振调控机构, 在实验室搭建

单色光入射的偏振调制测量光路, 原理光路如图 1 所示. 由光源、起偏器、双波片、待测元件、检偏器和探测器组成. 改变双波片的快轴方向分别以 4 种线性无关的偏振光入射到待测元件, 经过检偏器后测得对应的 4 种不同的出射偏振态, 根据入射和出射偏振态之间的投影关系, 进而唯一确定待测元件的 Mueller 矩阵.

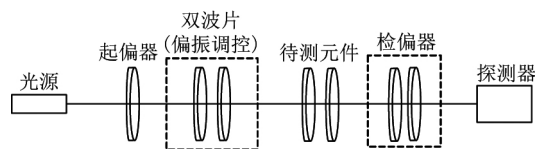


图 1 偏振调制测量系统的光路原理图

Fig. 1 Optical schematic of polarization modulated measurement system

当任意偏振态的光束入射到待测元件时, 出射偏振态可表达为:

$$\vec{S}' = M \cdot \vec{S}, \quad (8)$$

其中  $\vec{S}$  和  $\vec{S}'$  分别为入射和出射 Stokes 矢量;  $M$  为待测元件的 Mueller 矩阵.

依次改变双波片的快轴方向, 以 4 种线性无关的偏振光  $\vec{S}_1$ 、 $\vec{S}_2$ 、 $\vec{S}_3$  和  $\vec{S}_4$  分别入射到待测元件, 入射可以表示为  $S_{\text{in}} = (\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4)$ , 其中  $S_{\text{in}}$  为  $4 \times 4$  阶矩阵, 表示所有的入射偏振态. 经过检偏器后, 测得对应的 4 种出射偏振态, 即  $S_{\text{out}} = (\vec{S}_1', \vec{S}_2', \vec{S}_3', \vec{S}_4')$ . 显然,  $S_{\text{in}}$  和  $S_{\text{out}}$  二者满足下列关系式, 即:

$$S_{\text{out}} = M \cdot S_{\text{in}}. \quad (9)$$

测量过程中, 分别以每种偏振态入射到待测元件, 经过检偏器后, 由探测器测得 4 个不同方向上的光强值, 对总光强值进行归一化. 整个实验中一共测得 16 个实数光强值, 根据这 16 个实数与 4 种线性无关入射偏振态之间的对应关系, 构建入射与出射偏振态之间的投影关系矩阵, 即:

$$P = \frac{1}{2} S_{\text{in}}^T \cdot S_{\text{out}} \quad P_{ij} = \frac{1}{2} \vec{S}_j^n \cdot \vec{S}_i^n \quad (i = j = 1, \dots, 4) \quad (10)$$

其中  $n$  表示入射或出射 Stokes 矢量中的第  $n$  个元素. 将式(9)代入式(10), 推导可得测量 Mueller 矩阵的表达式为:

$$M = 2(S_{\text{in}}^T)^{-1} \cdot P \cdot S_{\text{in}}^{-1}. \quad (11)$$

综上所述, 偏振调制测量系统对待测元件的 Mueller 矩阵测量, 主要包括以下几个步骤: 首先, 利

用双波片对经过起偏器后的偏振光进行调制,产生 4 种线性无关的出射偏振光作为待测元件的入射偏振态;其次,经过检偏器后,由探测器测得 4 个不同方向上的光强值,一共得到 16 个均小于 1 的光强值;最后,利用 MATLAB 辅助计算,求得待测元件的测量 Mueller 矩阵。

### 3 实验验证

采用 He-Ne 激光作为实验光源,待测元件为快轴方向固定不变的 1/2 波片,实验装置如图 2 所示。从光源出射的圆偏振光经过起偏器,调制为 45° 线偏振光,入射到双 1/4 波片偏振调制结构,改变两波片快轴之间的夹角大小,获得 4 种线性无关的偏振态,如表 1 所示。调制产生的 4 种偏振光依次入射到待测元件,出射偏振光经过检偏器后到达探测器,获得对应的出射 Stokes 矢量,如表 2 所示。

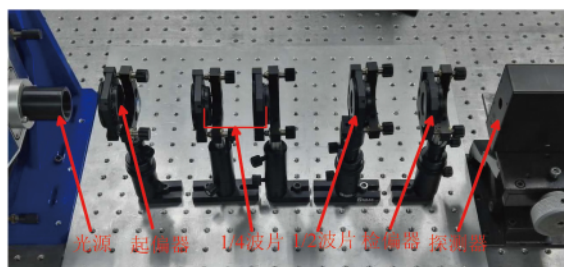


图 2 双波片偏振调制测量系统的实验装置图

Fig. 2 Experimental setup of polarization modulated measurement system using a biplate

通过改变双 1/4 波片两快轴之间的夹角大小,获得 4 种不同的线性无关偏振态,快轴旋转角度和调制后的偏振态如表 1 所示,其中总光强进行了归一化,即  $s_0 = 1$ 。

表 1 双 1/4 波片的快轴方向和调制偏振态

Table 1 Rotation angle and the modulated polarization state for a biplate consisting of double 1/4 wave-plates

| $\vec{S}_j$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $s_1$    | $s_2$    | $s_3$    |
|-------------|------------|------------|----------|----------|----------|
| $\vec{S}_1$ | 56°        | 102°       | 0.555 6  | -0.669 5 | -0.493 2 |
| $\vec{S}_2$ | 10°        | 50°        | -0.874 6 | 0.366 4  | -0.317 2 |
| $\vec{S}_3$ | 184°       | 186°       | -0.140 6 | -0.883 1 | 0.447 8  |
| $\vec{S}_4$ | 246°       | 250°       | 0.963 3  | -0.037 6 | 0.265 7  |

将上述 4 种偏振态依次入射到待测元件,出射

Stokes 矢量如表 2 所示,其中出射的总光强也进行了归一化,即  $s_0' = 1$ 。

表 2 待测 1/2 波片的出射偏振态

Table 2 Exiting polarization state of the measured 1/2 wave-plate

| $\vec{S}_j'$ | $s_1'$   | $s_2'$   | $s_3'$   |
|--------------|----------|----------|----------|
| $\vec{S}_1'$ | 0.478 9  | -0.828 0 | -0.160 2 |
| $\vec{S}_2'$ | -0.737 2 | 0.467 8  | -0.309 2 |
| $\vec{S}_3'$ | -0.160 2 | -0.861 5 | 0.481 9  |
| $\vec{S}_4'$ | 0.949 5  | -0.200 1 | 0.241 7  |

利用表 1 和表 2 中的 4 组入射和出射 Stokes 矢量,结合式(10)和式(11),计算得到待测 1/2 波片的测量 Muller 矩阵。

为了验证双 1/2 波片和双 1/4 波片的偏振调控作用,选取了 3 种不同的偏振态作为入射光,如表 3 所示。连续旋转改变双 1/2 波片和双 1/4 波片的快轴方向,追迹出射偏振态在庞加莱球面上的运动轨迹,其结果分别如图 3 和图 4 所示。

表 3 双 1/2 波片和双 1/4 波片的入射偏振态

Table 3 Incident polarization states for the double 1/2 and double 1/4 wave-plates

| 入射偏振态    | $\vec{S}_1$ | $\vec{S}_2$ | $\vec{S}_3$ |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| 双 1/2 波片 |             |             |             |
| 椭圆角/(°)  | -15.260     | 21.439      | -0.144      |
| 方位角/(°)  | -23.446     | 22.960      | 0.024       |
| 双 1/4 波片 |             |             |             |
| 椭圆角/(°)  | 0.012       | -0.144      | -0.034      |
| 方位角/(°)  | 45.068      | 0.024       | 89.712      |

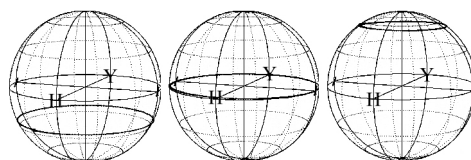


图 3 双 1/2 波片偏振调制作用的追迹结果

Fig. 3 Polarization modulation tracking results for a biplate consisting of double 1/2 wave-plates

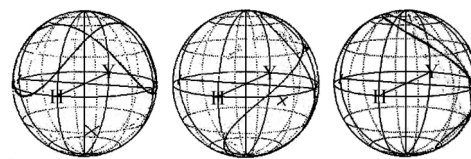


图 4 双 1/4 波片偏振调制作用的追迹结果

Fig. 4 Polarization modulation tracking results for a biplate consisting of double 1/4 wave-plates

## 4 实验结果分析

双波片偏振调控机构是偏振调制测量系统的核心组成部分,其中波片的快轴方向误差和位相延迟误差直接影响偏振调制精度和偏振测量精度.在目前偏振元件的加工技术中,波片的加工可以达到较高的精度,快轴方向误差可以达到  $\pm 2^\circ$ ,位相延迟误差可以做到  $\lambda/300$ .在上述实验装置中,波片自身误差对待测元件 Mueller 矩阵测量精度和对出射偏振态调控精度的影响,分析如下.

由图 3 和图 4 可以看出:双  $1/2$  波片的出射偏振态随着快轴方向的改变,在庞加莱球面上做平行于赤道平面的圆周运动,即椭圆角不发生改变.相对而言,双  $1/4$  波片对入射偏振态的调控作用较为复杂,双  $1/4$  波片的出射偏振态随着快轴方向的变化而变化,在此过程中,可以看到:通过双  $1/4$  波片可以获得与入射偏振态相正交的出射偏振态,在庞加莱球面上表现为:关于球心对称;其次,双  $1/4$  波片对偏振态的调控途径并不唯一,如图 4 中要将水平线偏振光调控为右旋圆偏振光,至少有两种不同的途径可实现,这也为偏振态的调控提出了新想法.综上所述可知:双  $1/2$  波片和双  $1/4$  波片的偏振调控实验结果与第 2 节中的理论分析结果完全一致.

对于上述待测元件 Mueller 矩阵的偏振调制测量实验结果,结合第 2 节中的偏振测量原理,可得待测元件的入射偏振态矩阵和出射偏振态矩阵分别为:

$$S_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.555 & 6 & -0.874 & 6 & -0.140 & 6 & 0.963 & 3 \\ -0.669 & 5 & 0.366 & 4 & -0.883 & 1 & -0.037 & 6 \\ -0.493 & 2 & -0.317 & 2 & -0.447 & 8 & 0.265 & 7 \end{pmatrix}$$

$$S_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.567 & 7 & -0.896 & 0 & -0.097 & 9 & 0.964 & 8 \\ -0.661 & 0 & 0.313 & 2 & -0.875 & 1 & -0.008 & 6 \\ -0.490 & 7 & -0.314 & 8 & 0.473 & 9 & 0.263 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

由式(10)和式(12),可求得入射与出射偏振态之间的投影关系矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1.000 & 0 & 0.223 & 9 & 0.648 & 9 & 0.706 & 0 \\ 0.208 & 5 & 0.999 & 1 & 0.307 & 3 & 0.034 & 8 \\ 0.642 & 1 & 0.354 & 2 & 0.999 & 4 & 0.494 & 9 \\ 0.720 & 7 & 0.020 & 7 & 0.532 & 3 & 0.999 & 8 \end{pmatrix} \quad (13)$$

结合式(11),可得待测元件的 Mueller 矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} 1.000 & 0 & 0.000 & 0 & 0.000 & 0 & 0.000 & 0 \\ -0.002 & 7 & 0.996 & 9 & -0.040 & 2 & 0.021 & 1 \\ -0.000 & 5 & 0.034 & 5 & 0.984 & 4 & 0.021 & 5 \\ 0.000 & 5 & -0.010 & 7 & -0.017 & 2 & 1.013 & 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

对应的,待测  $1/2$  波片 ( $\theta = 0$ ) 的理论 Mueller 矩阵如式(2)所示.由此可知: $1/2$  波片 Mueller 矩阵的最大测量误差为 0.040 2.为了定量分析波片自身误差对待测  $1/2$  波片 Mueller 矩阵测量精度和出射偏振态调控精度的影响,做如下分析.

上述基于双  $1/4$  波片的偏振调制测量系统的 Mueller 矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\cos 4\theta(1 - \cos 2\phi) + \cos \phi & \cos^2 2\theta \sin^2 \phi & -\sin \phi A \\ 0 & -\sin^2 2\theta \sin^2 \phi & \frac{1}{4}\sin 4\theta(1 - \cos 2\phi) + \cos \phi & -\sin \phi B \\ 0 & \sin \phi B & \sin \phi A & \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中,  $A = \cos \phi \cos 2\theta + \sin 2\theta$ ,  $B = \cos \phi \sin 2\theta + \cos 2\theta$ ,  $\theta$  为波片的快轴方向,  $\phi$  为位相延迟.由此可得,快轴方向误差对测量结果的影响大小为:

$$\Delta M(\theta) = \frac{\partial M}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (16)$$

其中  $\Delta \theta$  为波片的快轴方向误差,结合目前波片的工艺水平,快轴方向误差  $\pm 2^\circ$ ,利用 MATLAB 辅助计算,可得波片的快轴方向误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响如图 5 所示.

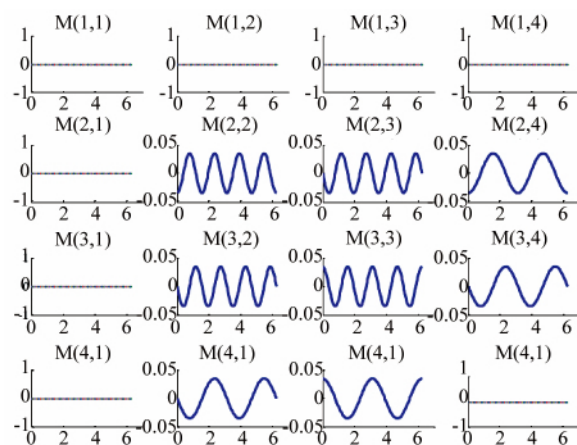


图 5 波片的快轴方向误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响

Fig.5 Influence of fast axis direction error on the Mueller matrix measurement result

同理可得,位相延迟误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响大小为:



$$\Delta M(\phi) = \frac{\partial M}{\partial \phi} \Delta \phi, \quad (17)$$

其中  $\Delta \phi$  为波片的位相延迟误差,结合波片的加工工艺,位相延迟误差能达到  $\lambda/300$ ,利用 MATLAB 辅助计算,可得波片的位相延迟误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响如图 6 所示。

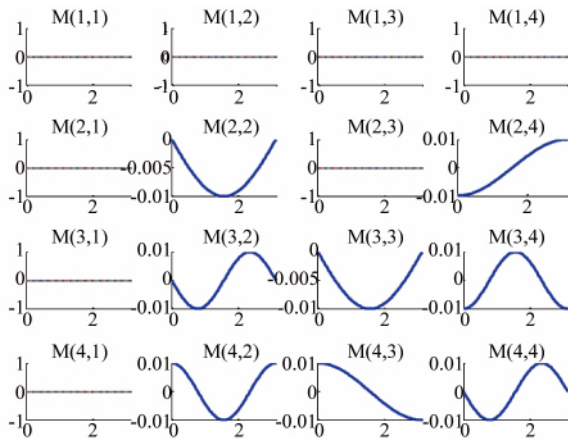


图 6 波片的位相延迟误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响  
Fig. 6 Influence of retardance error on the Mueller matrix measurement results

联立式(9)和式(15),并结合式(12)中的4种不同入射偏振态,定量分析波片的快轴方向误差和位相延迟误差对出射偏振态调控精度的影响.一般对偏振态的定量分析主要从偏振度、椭圆角和方位角三个方面去考察。

由式(1)可知,任意偏振态均可表示为偏振度  $P$ 、椭圆角  $\varphi$  和方位角  $\alpha$  的表达形式.在双  $1/4$  波片偏振调制测量系统中,波片自身误差对偏振态调控精度的影响,即偏振度误差  $\Delta P$ 、椭圆角误差  $\Delta \varphi$  和方位角误差  $\Delta \alpha$  全部包含于测量 Mueller 矩阵之中,由此可得:

$$S(P', \varphi', \alpha') = M(\theta, \Phi) S(P, \varphi, \alpha) \quad (18)$$

不难发现,出射偏振态  $S(P', \varphi', \alpha')$  也可表示为快轴方向  $\theta$  和位相延迟  $\phi$  的表达形式,对应的偏振度  $P'$ 、椭圆角  $\varphi'$  和方位角  $\alpha'$  均可表达为  $\theta$  和  $\phi$  的形式.因此,波片快轴方向误差和位相延迟误差对出射偏振态调控精度的定量分析方法与上述 Mueller 矩阵测量精度分析方法类似.针对式(12)中4种线性无关的入射偏振态,经过双  $1/4$  波片偏振调制测量系统,波片的快轴方向误差和位相延迟误差对出射偏振态调控精度的影响如图 7 和图 8 所示。

由图 7 和图 8 可以看出:当波片的快轴方向误

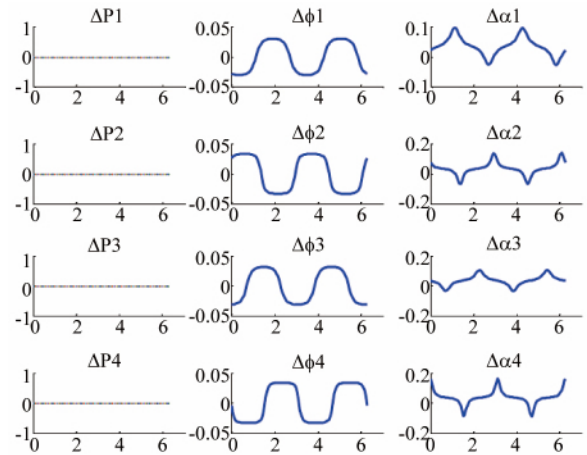


图 7 波片的快轴方向误差对出射偏振态调控精度的影响  
Fig. 7 Influence of fast axis direction error on the polarization control accuracy

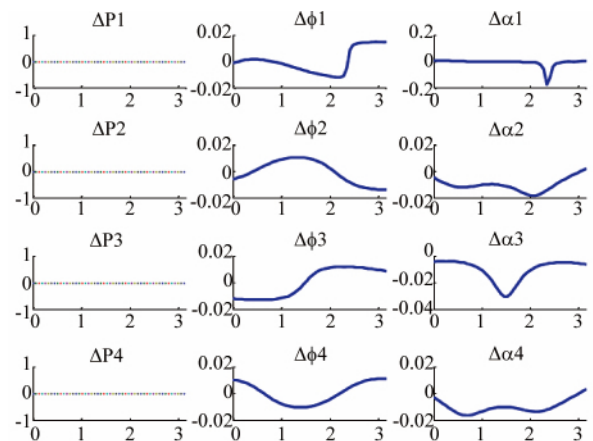


图 8 波片的位相延迟误差对出射偏振态调控精度的影响  
Fig. 8 Influence of retardance error on the polarization control accuracy

差为  $\pm 2^\circ$ ,位相延迟误差为  $\lambda/300$  时,对出射偏振态调控精度的影响表现为:波片自身误差不影响出射偏振态的偏振度,而对椭圆角和方位角的影响与入射偏振态有关.针对式(12)中的4种入射偏振态,当波片自身误差所引起的方位角误差不大于  $0.16$  rad 时,波片的快轴方向误差引起的椭圆角误差最大不超过  $0.032$  rad,波片的位相延迟误差导致的椭圆角误差小于  $0.015$  rad.

## 5 结论

基于 Stokes-Mueller 矩阵偏振算法,对双  $1/4$  波片和双  $1/2$  波片进行了偏振调制机理理论推导论证,得出调制偏振态与双波片快轴方向之间的关系以及在庞加莱球上的运动轨迹.研究表明:双  $1/4$  波片可以完成偏振态的任意调控,改变两波片快轴方

向,可以对偏振态的椭圆率角和方位角同时进行调控;双  $1/2$  波片只可以对偏振态的方位角进行调控,调控大小取决于两波片快轴之间的夹角大小,且调制精度是普通偏振旋转器的二倍. 基于双波片偏振调控机理,提出双  $1/4$  波片偏振调制测量系统,根据入射和出射 Stokes 矢量之间的关系,构建投影关系矩阵算法,完成对待测元件 Mueller 矩阵的测量,并分析了波片快轴方向误差和位相延迟误差对 Mueller 矩阵测量结果以及对出射偏振态调控精度的影响. 定量分析结果表明:波片的快轴方向误差为  $\pm 2^\circ$ ,位相延迟误差为  $\lambda/300$  时,波片自身误差对 Mueller 矩阵测量结果的影响可以忽略不计,最大测量误差不超过 0.0402;波片自身误差对出射偏振态调控精度的影响也非常小,当方位角误差不大于 0.16 rad 时,波片的快轴方向误差所引起的椭圆率角误差最大不超过 0.032 rad,波片的位相延迟误差所导致的椭圆率角误差小于 0.015 rad,且不影响偏振度.

## References

- [1] Goldstein D. *Polarized light, revised and expanded* [M]. Florida: Lasers Optics & Photonics, 2003.
- [2] Bashara N M. *Ellipsometry and polarized light* [M]. America and Canada: Elsevier North-Holland, 1977.
- [3] LIU Qiang, LI Shuang, GONG Ping. Analysis for Influence of Element Deviation to DOLP Measured by Spatial Modulating Spectropolarimeter [J]. *Acta Optica Sinica* (刘强,李双,龚平. 空间调制线偏振光谱测量的误差影响仿真分析. *光学学报*), 2014, 34(7): 105-109.
- [4] CUI Gao-Zeng, LIU Tao, LI Guo-Guang, et al. A method to measure the misalignment angle of the optical axes of bi-plate compensators [J]. *Laser & Optoelectronics Progress* (崔高增,刘涛,李国光,等. 一种测量双片波片补偿器中光轴偏差角度的方法. *激光与光电子学进展*), 2013, 50(6): 89-94.
- [5] Gil J J. Polarimetric characterization of light and media [J]. *European Physical Journal-Applied Physics*, 2007, 40(1): 1-47.
- [6] He W, Fu Y, Yang Z, et al. Polarization properties of a corner-cube retroreflector with three-dimensional polarization ray-tracing calculus [J]. *Applied Optics*, 2013, 52(19): 4527-4535.
- [7] LI Ya-Hong, FU Yue-Gang, HE Wen-Jun. Polarization properties of cat's eye retroreflector based on three-dimensional Jones matrix method [J]. *Infrared and Laser Engineering* (李亚红,付跃刚,贺文俊. 基于三维琼斯矩阵法对“猫眼”逆反射器的偏振特性研究. *红外与激光工程*), 2017, 46(4).
- [8] ZHAO Wei-Qian, TANG Fang, QIU Li-Rong. Research status and application on the focusing properties of cylindrical vector beams [J]. *Acta physica sinica* (赵维谦,唐芳,邱丽荣. 轴对称矢量光束聚焦特性研究现状及其应用. *物理学报*), 2013, 62(5): 54201-054201.
- [9] XI Si-Xing, WANG Xiao-Lei, HUANG Shuai. Generation of vector beams in terms of the partial light modulator of a twisted nematic liquid crystal [J]. *Acta physica sinica* (席思星,王晓雷,黄帅,等. 基于扭曲向列液晶空间光调制器的矢量光生成. *物理学报*), 2015, 64(11): 140-146.
- [10] Adam K, Maurer W. Polarization effects in immersion lithography [J]. *Journal of Microlithography Microfabrication & Microsystems*, 2005, 4(3): 329-343.
- [11] McIntyre G R, Kye J W, Levinson H J, et al. Polarization aberrations in hyper-numerical-aperture projection printing: a comparison of various representations [J]. *Journal of Microlithography Microfabrication & Microsystems*, 2006, 5(3): 170-173.
- [12] ZHENG Yu-Xiang, CHEN Liang-Yao. *Contemporary optics* [M]. Beijing: Contemporary optics (郑玉祥,陈良尧. *近代光学*. 北京: 电子工业出版社), 2011.
- [13] YAN Ji-Xiang, WEI Guang-Hui, HA Liu-Zhu, et al. *Matrix optics* [M]. Beijing: Engineering Industry Publishing Company (阎吉祥,魏光辉,哈流柱,等. *矩阵光学*. 北京: 兵器工业出版社), 1995.