

DOI: 10.3901/JME.2017.09.046

考虑材料和几何构型的环形柔性铰链优化设计

曹玉岩 王志臣 周 超 王文攀

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033)

摘要: 柔性铰链已广泛应用泛于工程中多个领域,为了解决柔性铰链材料及几何构型同时优化的问题,对铰链的力学建模方法及优化设计算法进行了深入研究。根据柔性铰链的特性,即由圆周对称分布的柔性单元组成,将柔性单元简化为超静定梁,应用虚功原理推导了柔性单元的径向及切向刚度,并根据力平衡条件及变形协调条件,推导铰链的整体刚度,该刚度为材料参数、几何参数及构型的函数。建立铰链的优化设计模型,基于 SIMP/RAMP 模型,将材料参数表达为人工变量与备选材料参数的组合表达式,铰链的刚度表达为人工变量与不同构型刚度的组合表达式,从而将离散混合整数规划问题转化为连续参数优化问题,使得优化模型可以采用基于梯度的优化算法求解,降低了模型复杂程度且提高了求解效率。对柔性铰链的刚度进行了试验验证,理论结果与试验结果一致。此外,以球面反射镜侧向支撑为例来验证铰链的优化设计模型及算法,结果表明:逐次增大惩罚因子的求解算法使得初始阶段具有较大求解空间,随着惩罚因子增大,人工变量最终趋于 0/1 值,通过铰链参数及构型优化,使反射镜面形精度较初始设计提高 15% 左右。

关键词: 柔性铰链; 虚功原理; 几何构型; 离散优化; 连续优化

中图分类号: TP13

Optimization of Circular-axis Flexure Hinge by Considering Material Selection and Geometrical Configuration Simultaneously

CAO Yuyan WANG Zhichen ZHOU Chao WANG Wenpan

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033)

Abstract: The circular-axis flexure hinge has been widely used in various fields. In order to solve the problem of optimizing material and geometrical configuration of flexure hinge simultaneously, the mechanical modeling method and optimization algorithm is investigated. According to the structural property of the flexure hinge, which consists of several flexural elements, the flexure hinge is simplified to indeterminate beam. The radial and tangential stiffness is derived by using virtual work principle. The whole stiffness of the flexure hinge, which is the function of material, geometrical parameters and its configuration, is obtained based on force equilibrium condition and compatible deformation. The optimization model for flexure hinge design is established. By introducing the SIMP/RAMP based model, the material parameter is expressed as the combination of artificial variables and candidate material parameters and the stiffness of flexure hinge is expressed as the combination of artificial variables and stiffness parameter corresponding to different geometrical configuration. The discrete integer programming problem can be transformed into continuous parameters optimization problem, then the gradient based method can be used to solve the optimization problem, which decreases the complexity of optimization model and improves the computational efficiency. The stiffness model of flexure hinge is verified by experiment, and the theoretical results are in good agreement with experimental results. In addition, the example of spherical mirror is given to verify the optimization model and algorithm. The obtained results show that the solving scheme guarantees the enough solution space in the beginning and finally drives the artificial variables to 0-1 values as the penal factor increasing. The surface precision of the mirror is increased by 15% after optimization design.

Key words: flexure hinge; virtual work principle; geometrical configuration; discrete optimization; continuous optimization

0 前言

柔性铰链已广泛应用于多个领域^[1-2],如微米/

纳米设备^[3],光学设备^[4],陀螺仪^[5],传感器及驱动器^[6],微位移定位平台^[7]。柔性结构的广泛应用在于:① 重复定位精度高;② 低摩擦性;③ 容易加工制造且成本相对较低。

在光学设备中,尤其是光学元件支撑与定位结

20160614 收到初稿,20170104 收到修改稿

构中广泛采用柔性结构^[8-10]。光学系统要求其支撑结构能够将光学元件与机械载荷隔离,不合适的支撑结构会严重损害光学系统性能。理想情况是采用运动学支撑方式,即约束三个正交轴自由度且无冗余约束。理想运动学支撑的点接触在实际中并不可行,而带有有限接触面积的准运动学支撑能够有效分散接触应力。柔性支撑结构可认为是一种准运动学支撑方式,在某些方向上具有一定的柔度,其他方向上具有很高刚度^[5, 11]。与其他柔性机构不同,柔性支撑结构保持光学元件位置精度和面形精度^[12-13],即使存在着温度或其他环境扰动。柔性铰链在某些自由度上具有一定的柔度,容许有少量可控的相对位移,其他方向上则具有较大刚度。这个特征使得柔性铰链非常适合应用于柔性支撑结构中。在环境温度变化时,光学元件及其支撑组件将产生变形,热变形系数的不匹配将导致接触应力出现,接触应力将直接影响光学元件的面形,甚至造成破坏,而柔度可以有效地减小这部分接触应力^[14-16]。此外,采用柔性支撑方式能减小甚至消除摩擦效应和滞后效应。

尽管柔性支撑结构具有以上优点,但其建模非常复杂,尤其是结构中包含多个铰链同时作用的情况。为了设计出合理的柔性铰链,需要精确的理论模型或经验公式来估计铰链的刚度或柔度。早在1965年,PAROS等^[5]推导了圆形切口柔性铰链的设计计算公式并一直沿用至今。SMITH等^[17]在PAROS等工作的基础上,推导了椭圆切口柔性铰链的理论公式。吴鹰飞等^[18]推导了一般柔性铰链和直圆切口柔性铰链的系列设计公式,表达式简洁,有利于铰链柔度或刚度的设计计算。YONG等^[19]在总结各种不同的圆形柔性铰链的设计公式基础上,推导了柔性铰链刚度的经验公式。LOBONTIU等^[20-21]研究了对称切口柔性铰链,应用卡氏第二定理推导了柔性铰链的理论刚度,并利用有限元仿真和试验验证了理论刚度。在光学结构应用方面,KIHM等^[22]研究了新型bipod柔性支撑结构,能够应用在空间望远镜主镜支撑结构中,应用有限元方法分析了反射镜的面形精度并与干涉仪测量数据进行对比,结构振动测试验证了柔性支撑结构的性能满足使用要求。李宗轩等^[23]提出了用于空间传感器大口径主反射镜支撑的Cartwheel型双轴柔铰结构,采用量纲一设计方法确定柔铰的参数,尽管此方法确定的参数满足了设计要求,但无法确定此参数是否为最佳参数。赵磊等^[24]设计了光刻投影物镜中透镜的支撑结构,轴向采用多点挠性支撑结构,支撑中的弹性片简化为悬臂梁模型,但对弹性片的数目对

面形精度的影响未作深入分析。

柔性支撑结构的功能是实现光学元件的安装与定位,且当环境存在一定的温度梯度时,仍然能保持其性能。功能上包括了两个方面:①定位,即要求具有一定的刚度来承受元件自身载荷,使得不同姿态时,能够保持其光轴位置不变;②协调变形,即当有温度梯度存在时,要有一定柔度来协调因热变形系数不匹配带来的变形偏差。这两方面功能本质上是相互矛盾的,即柔性支撑的刚度和柔度之间是相互关联的。为解决上述矛盾,需要对铰链的材料参数、几何参数及构型进行优化设计。然而,柔性铰链模型非常复杂,而且材料参数和构型的优化涉及离散优化问题。为解决材料参数和构型同时优化的问题,本文对反射镜侧向支撑中所采用的环形柔性铰链的力学模型及优化算法进行了深入研究。首先,推导了广义力学模型,模型中包含了结构参数及几何构型因素。其次,基于拓扑优化中所采用的各向同性惩罚微结构模型(Solid isotropic microstructures with penalization, SIMP)和材料属性合理近似模型(Rational approximation of material properties, RAMP)^[25-26],建立了柔性铰链优化设计模型,材料参数表达为备选材料参数与人工变量的插值表达式,刚度参数表达为人工变量与不同几何构型刚度的插值表达式,从而将离散优化问题转化为连续优化问题,简化了模型复杂性,且可实现材料与几何构型的同时优化。最后,对柔性铰链试验件进行刚度测试,来验证推导的力学模型,并通过有限元仿真来验证优化设计算法。此外,以球面反射镜侧向支撑为例,验证本文提出的铰链优化设计算法,并采用有限元软件分析反射镜的面形误差。

1 环形柔性铰链力学建模

环形柔性铰链如图1所示,其柔性部分为细长弧形薄梁。该类型柔性铰链在光学反射镜侧向支撑结构中有广泛的应用,尤其当反射镜工作环境温度变化范围非常大的情况。采用柔性支撑结构具有很多优点:①柔性铰链的变形可恢复,即在受到冲击、振动及温度应力等影响后,反射镜的位置及共轴精度不会受到影响;②柔性环节在反射镜热变形方向上具有较大柔度,即当温度变化引起反射镜及其他结构变形不一致时,柔性环节可明显减小部件之间的连接应力。此外,该柔性铰链可设计为不同的几何构型以满足不同反射镜对变形及应力的要求,如图2所示。

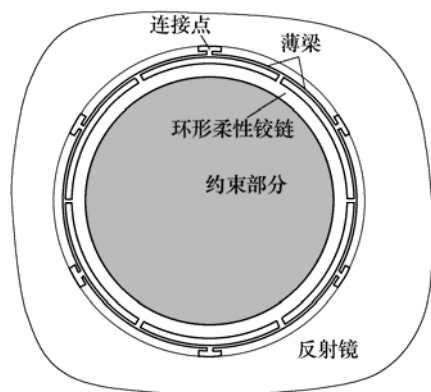


图1 环形柔性铰链结构

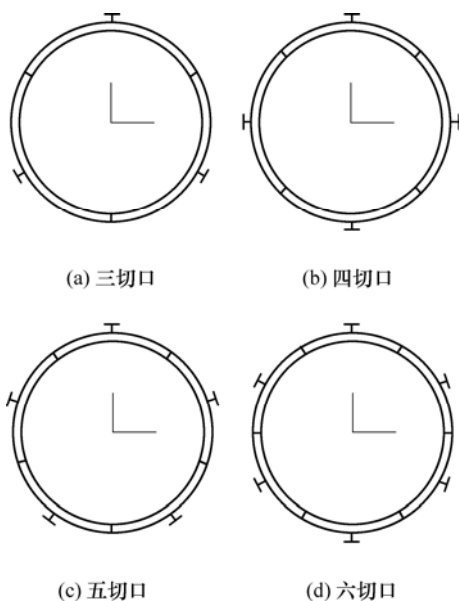


图2 不同几何构型的环形柔性铰链

尽管在反射镜中采用柔性支撑结构具有上述优点，但由于存在柔性环节，在反射镜指向水平位置情况下，光轴会较理想位置存在一定的偏移，且反射镜的支撑组件谐振低于刚性支撑情况。此外，由于在支撑中引入了柔性结构，使得结构力学模型变得非常复杂。为了能够合理设计该柔性铰链，需要深入研究铰链的力学模型，确定结构参数和几何构型与反射镜性能指标之间的关系，进而设计出合理的结构，以提高反射镜的性能。

1.1 虚功原理

对于图1所示的环形柔性铰链，其柔性环节为若干离散的薄梁单元，如图3所示，可采用虚功原理来计算其刚度或柔度。虚功原理可表述为^[27]：若连续体处于平衡状态，那么内力和外力在虚位移上所做的虚功之和等于零，即

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (1)$$

式中， δU 为内力虚功， δV 为外力虚功。

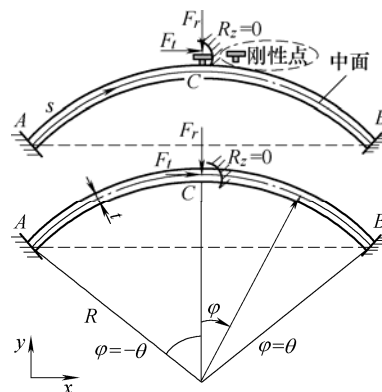


图3 柔性单元

考虑梁结构在一组外力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 作用下，各个力作用点处的虚位移为 $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$ ，由虚功原理

$$\int_s M \delta \varphi + F_s \delta \lambda + F_N \delta u + T \delta \phi - \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = 0 \quad (2)$$

式中， M, F_s, F_N, T 为梁截面内力， $\delta \varphi, \delta \lambda, \delta u, \delta \phi$ 为虚位移。对于图1所示的柔性铰链，仅考虑弯矩 M 的作用。

在梁结构中施加一单位广义力，应用虚功原理，该位置的广义位移

$$\delta = \int_s \bar{M} \frac{M}{EI} ds \quad (3)$$

式中， $\bar{M}$ 为由单位力产生的弯矩， M 为由广义外力产生的弯矩， E, I 分别为弹性模量和惯性矩。

1.2 柔性单元建模

由图1可以看出，环形柔性铰链由多个相同的柔性单元(图3)构成，且在圆周方向上对称。柔性单元与反射镜之间通过一个“T”形点连接，反射镜与柔性单元间的作用力可分解为径向力 F_r 和切向力 F_t 作用在“T”形点上。该“T”形点尺寸相对较小，可将其视为刚体，则外力 F_r 和 F_t 可等效的作用在 C 点处。由于“T”形连接点与反射镜间通常粘接在一起，则在 C 点位置处无相对自由度，故在 C 点处增加约束 $R_z = 0$ 。由图3，柔性单元可视为一超静定梁结构，含有4个冗余约束，其结构由以下参数确定：半径 R ，中心夹角 2θ ，厚度 t ，面内宽度 b ，其中，中心夹角 2θ 由圆周方向切口数 n 确定。假设柔性单元在径向和切向上的刚度分别为 K_r, K_t ，且径向力 F_r 和切向力 F_t 仅产生与各自方向一致的位移，则 C 点处径向和切向位移可表达为

$$\delta_r = \frac{F_r}{K_r} \quad (4)$$

$$\delta_t = \frac{F_t}{K_t} \quad (5)$$

径向表示沿半径方向, 切向表示垂直半径方向。

图3所示的柔性单元, 解除B和C点处的冗余约束, 并在相应方向上施加未知力, 如图4所示。根据虚功原理计算各未知力方向上的广义位移, 然后通过施加B和C点处位移边界条件即可确定未知力的大小。如图4所示, 在每个未知力方向上分别施加单位载荷, 梁截面弯矩可分别表示为

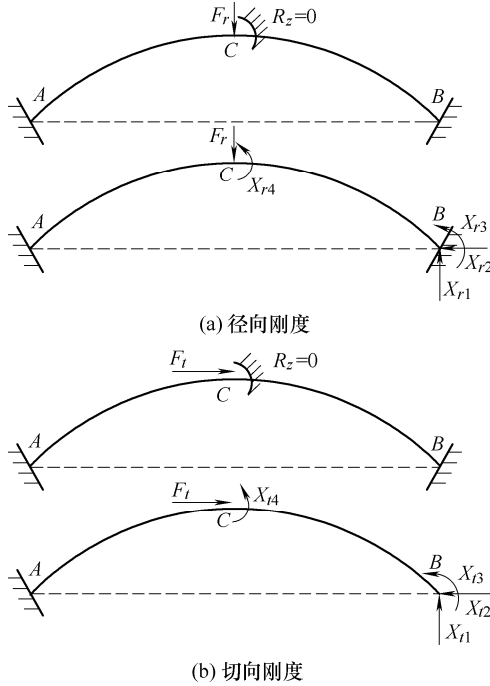


图4 超静定结构的等效模型

$$\bar{M}_1(\varphi) = R(\sin \theta - \sin \varphi) \quad (6)$$

$$\bar{M}_2(\varphi) = -R(\cos \varphi - \cos \theta) \quad (7)$$

$$\bar{M}_3(\varphi) = 1 \quad (8)$$

$$\bar{M}_4(\varphi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ 1 & -\theta \leq \varphi < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{M}_4(\varphi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ -R \cdot (1 - \cos \varphi) & -\theta \leq \varphi < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{M}_r(\varphi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ -R \cdot \sin \varphi & -\theta \leq \varphi < 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\bar{M}_r$ 和 $\bar{M}_t$ 表示与径向力 F_r 和切向力 F_t 一致的单位载荷引起的弯矩。

由径向力 F_r 和未知载荷 X_{ri} 产生的弯矩 $M_r(\varphi)$ 可表示为

$$M_r(\varphi) = \begin{cases} X_{r3} + X_{r1}R(\sin \theta - \sin \varphi) - \\ X_{r2}R(\cos \varphi - \cos \theta) & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ X_{r3} + X_{r1}R(\sin \theta - \sin \varphi) - \\ X_{r2}R(\cos \varphi - \cos \theta) + \\ X_{r4} - F_r R \sin \theta & -\theta \leq \varphi < 0 \end{cases} \quad (12)$$

由切向力 F_t 和未知载荷 X_{ti} 产生的弯矩 $M_t(\varphi)$ 可表示为

$$M_t(\varphi) = \begin{cases} X_{t3} + X_{t1}R(\sin \theta - \sin \varphi) - \\ X_{t2}R(\cos \varphi - \cos \theta) & 0 \leq \varphi \leq \theta \\ X_{t3} + X_{t1}R(\sin \theta - \sin \varphi) - \\ X_{t2}R(\cos \varphi - \cos \theta) + X_{t4} - \\ F_t R(1 - \cos \varphi) & -\theta \leq \varphi < 0 \end{cases} \quad (13)$$

根据虚功原理, 即式(3), 可得未知力引起的广义位移为

$$\delta_{ri} = \frac{1}{EI} \int_s \bar{M}_i(\varphi) M_r(\varphi) ds \quad (14)$$

$$\delta_{ti} = \frac{1}{EI} \int_s \bar{M}_i(\varphi) M_t(\varphi) ds \quad (15)$$

式中, $\delta_{ri}, \delta_{ti} (i=1,2,3,4)$ 为广义位移, 与径向刚度和切向刚度方向一致。

令广义位移 δ_{ri}, δ_{ti} 为零, 可通过求解方程组得到各未知力 X_{ri} 和 X_{ti} 的值。将 X_{ri} 和 X_{ti} 代入式(12)、(13), 再利用虚功原理式(3), 即可得到C点处的径向位移 δ_r 和切向位移 δ_t 分别为

$$\delta_r = \frac{1}{EI} \int_s \bar{M}_r(\varphi) M_r(\varphi) ds = \frac{FR^3}{8EI} \times \frac{8 \sin \theta - 4 \sin 2\theta - 9\theta + \theta \cos 2\theta + 8\theta \cos \theta + 2\theta^3}{\cos 2\theta + \theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 - 1} \quad (16)$$

$$\delta_t = \frac{1}{EI} \int_s \bar{M}_t(\varphi) M_t(\varphi) ds = -\frac{FR^3}{4EI} \times \frac{4 \sin \theta - 5\theta + \theta \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + 4\theta \cos \theta + \theta^3}{\theta \cos \theta \sin \theta - 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - \theta^2 + 2} \quad (17)$$

根据式(4)、(5), 柔性单元(图3)的径向刚度 K_r 和切向刚度 K_t 分别为

$$K_r = \frac{F_r}{\delta_r} = K_{r0} \frac{EI}{R^3} = \frac{1}{12R^3} K_{r0} Ebt^3 \quad (18)$$

$$K_t = \frac{F_t}{\delta_t} = K_{t0} \frac{EI}{R^3} = \frac{1}{12R^3} K_{t0} Ebt^3 \quad (19)$$

式中, K_{r0} 和 K_{t0} 分别为径向和切向刚度系数, 为中心夹角 θ 的函数, 即

$$K_{r0} = \frac{8(\cos 2\theta + \theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 - 1)}{8 \sin \theta - 4 \sin 2\theta - 9\theta + \theta \cos 2\theta + 8\theta \cos \theta + 2\theta^3} \quad (20)$$

$$K_{t0} = \frac{-4(\theta \cos \theta \sin \theta - 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - \theta^2 + 2)}{4 \sin \theta - 5\theta + \theta \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + 4\theta \cos \theta + \theta^3} \quad (21)$$

由式(18)、(19)可看出, 柔性单元的刚度与材料参数 E 、厚度 t 、面内宽度 b 和中心夹角 2θ 直接相关。

1.3 环形柔性铰链整体建模

考虑图 5 所示反射镜侧向支撑结构, 环形铰链内环完全约束, 外部通过若干连接点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 与反射镜黏结在一起。柔性铰链的功能是实现反射镜的定位, 即光轴在任何角度时, 反射镜光轴位置偏差在容许偏差范围内。而反射镜的变形, 即面形精度通常优于 $0.05\lambda (\lambda=632.8 \text{ nm})$, 因此在分析光轴位置偏差时可将反射镜视为刚体。柔性铰链的力和位移分析如图 6 所示, 图中 n 为切口数, α 为安装角度, $F_1, F_2, \dots, F_n$ 分别表示连接点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 处所受的外力, F_{ir}, F_{it}, F_{iy} 为 F_i 在径向, 切向和 y 向的分力, δ_{ir}, δ_{it} 表示连接点 P_i 处位移在径向和切向的分量。

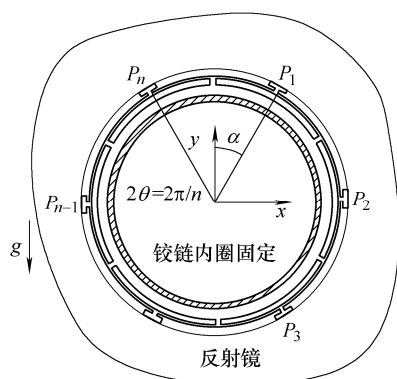
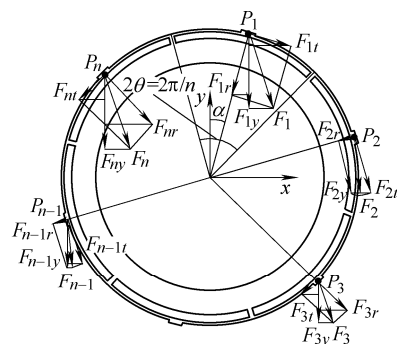
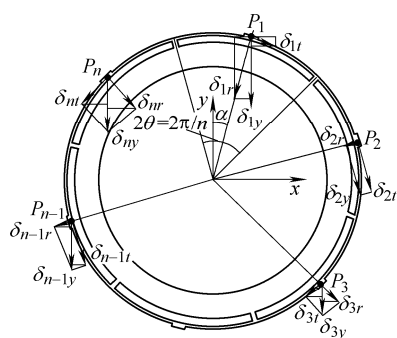


图 5 铰链的力学模型



(a) 力分析



(b) 位移分析

图 6 铰链的力和位移分析示意图

根据几何关系, y 向的分力 F_{iy} 和位移 δ_{iy} 可分别表示为

$$F_{iy} = -F_{it} \sin\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) - F_{ir} \cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \quad (22)$$

$$\delta_{iy} = -\delta_{it} \sin\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) - \delta_{ir} \cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \quad (23)$$

根据力平衡关系

$$F = \sum_{i=1}^n F_{iy} = -\sum_{i=1}^n \left(F_{it} \sin\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) + F_{ir} \cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad (24)$$

由于铰链仅在 y 向受力, 连接点 P_i 的 x 向分量为零, 即

$$\delta_{ix} = -\delta_{it} \cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) + \delta_{ir} \sin\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad (25)$$

由于反射镜可近似视为刚体, 各连接点 P_i 处的位移将一致, 即

$$\delta_{ix} = -\delta_{it} \cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) + \delta_{ir} \sin\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad (26)$$

由式(25)、(26), 各连接点的位移 δ_y 可表示为

$$\delta_y = -\delta_{ir} \frac{1}{\cos\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (27)$$

根据式(18)、(19)、(24)、(27)得

$$F = \delta_y \sum_{i=1}^n \left(K_t \sin^2\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) + K_r \cos^2\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad (28)$$

由式(28)得环形柔性铰链的整体刚度为

$$K_n = \sum_{i=1}^n \left(K_t \sin^2\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) + K_r \sin^2\left(\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad (29)$$

将式(18)、(19)代入式(29)得

$$K_n = \frac{Ebt^3}{12R^3} \times K_{0n} \quad (30)$$

式中, K_{0n} 为整体刚度系数。

柔性铰链的整体刚度系数 K_{0n} 是中心角度 2θ 和安装角度 α 的函数。尽管在表达式推导时, 仅考虑竖向的平衡, 但表达式中包含了安装角度 α , 式(30)为图5所示铰链的广义刚度表达式, 可通过设置不同的 α 值得到任意方向上的刚度。整体刚度系数 K_{0n} 随安装角度 α 及切口数 n 的变化曲线如图7所示。

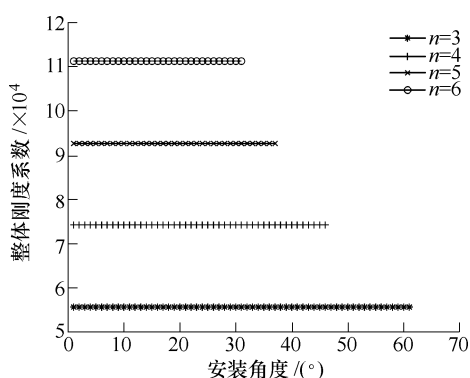


图7 整体刚度系数与安装角度及切口数目关系

从图7中可以看出, 随安装角度 α 增大, 柔性铰链的整体刚度系数基本保持不变。此外, 刚度系数随着切口数目增多而增大。

2 考虑材料及几何构型的优化设计

当环形铰链用于反射镜侧向支撑结构时, 需要考虑以下两方面因素: ① 铰链要有足够的整体刚度, 以保证不同角度下反射镜光轴位置要求; ② 反射镜工作环境中存在较大温差时, 要保证反射镜的面形精度要求。反射镜的面形精度要求非常高, 通常均方根误差为 $(0.03\lambda \sim 0.05\lambda)$ ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$), 且反射镜面形对支撑应力非常敏感, 因此, 反射镜支撑结构中不容许有较大的支撑应力, 即使工作在温差较大环境下, 否则面形精度将很难满足使用要求。这两方面的要求本质上是存在矛盾的: 若保证光轴位置精度, 铰链必须具有较高的刚度; 而若保证各温度环境下反射镜的面形精度, 则铰链必须具有较大的柔度, 以降低温差引起的温度应力。为了设计出合理的铰链, 需要通过优化在刚度和柔度之间寻求平衡。

铰链的优化涉及选择合适的材料, 确定最佳几何构型及参数, 使其满足刚度和柔度要求。从柔性铰链刚度推导中可以看出, 铰链的刚度与切口数 n ,

材料弹性模量 E , 切口厚度 t , 宽度 b 及半径 R 有关, 通常半径 R 由反射镜结构决定。材料的优化问题涉及从一组有限离散材料中选择一种最佳的材料, 这种优化问题通常很难应用基于梯度的规划方法, 而非线性混合整数规划不但计算量非常大, 且很难保证得到最优结果。此外, 铰链的刚度表达式(29)为切口数目 n (仅能取整数值) 的非线性函数, 非常复杂且包含了很多谐波函数项, 很难直接利用该表达式进行铰链结构优化。为了解决以上结构优化的问题, 本文采用一种松弛的方法, 引入一组连续的人工变量, 将材料参数表达为备选材料参数的插值表达式, 通过约束条件和惩罚策略实现每次优化有且仅有一种材料被选择。铰链不同的切口数目对应不同的构型, 每种构型的刚度是一定的, 因此铰链几何构型优化可采用与材料优化相同的松弛方法, 引入另一组连续的人工变量, 将铰链的刚度表达为人工变量与不同构型刚度的插值表达式。通过引入以上两组人工变量, 离散整数规划问题将转化为连续参数优化问题, 使得优化模型得到很大简化。下面将详述结构优化中采用的松弛方法。

2.1 材料和刚度的插值策略

由于材料物理特性的约束, 当且仅当所引入的人工变量取 0/1 时才具有实际的物理意义。为实现以上目的, 需要采用合适的插值策略对材料参数进行插值, 允许优化过程中出现中间材料, 且同时应对中间材料进行相应的惩罚, 使得优化结果趋近 0/1 值。

首先, 定义一组与材料相关的人工变量 $x_j (j=1, 2, \dots, n_e)$, 即

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{第 } j \text{ 类材料被选中} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (31)$$

式中, x_j 为连续变量, n_e 为可选择材料数目。

拓扑优化中采用的多相 SIMP 和 RAMP 密度函数插值模型是工程中应用最多的方法, 能够有效地实现离散结构优化^[25, 28]。基于 SIMP 和 RAMP 的插值模型可分别表达为

$$E = E_0 + \sum_{j=1}^{n_e} x_j^p \Delta E_j \quad p \geq 1 \quad (32)$$

$$E = E_0 + \sum_{j=1}^{n_e} \frac{x_j}{1 + q(1 - x_j)} \Delta E_j \quad q \geq 0 \quad (33)$$

$$\Delta E_j = E_j - E_0 \quad (34)$$

式中, E 为插值后的弹性模量; E_j 为材料 j 的弹性模量; p, q 为惩罚因子, 用于惩罚中间变量值 $0 < x_j < 1$ 。

对于两种材料, 即 $n_e = 2 (E_1 = 60 \text{ GPa}, E_2 = 150 \text{ GPa})$ 情况下, 不同惩罚因子 p, q 所对应的材料模型变化如图8所示。

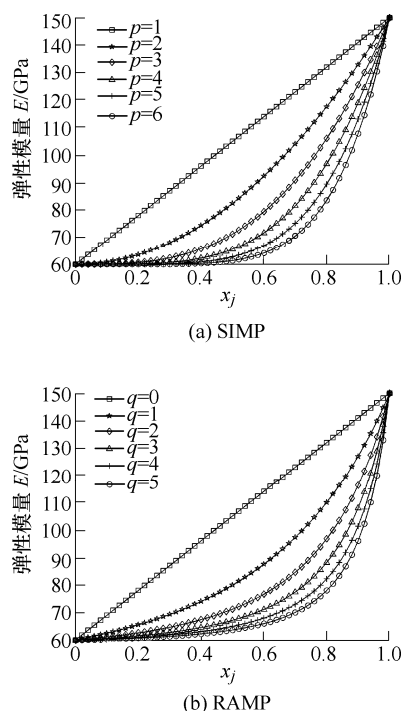


图 8 SIMP 和 RAMP 插值模型

图 8 表明, 应用 SIMP 或 RAMP 模型, 可使设计变量逼近极限值 0/1, 随着惩罚因子增大, 惩罚效果越来越明显。

同样应用 SIMP 或 RAMP 插值模型, 铰链的刚度可表达为

$$K = K_1 + \sum_{i=1}^{n_k} y_i^p \Delta K_i \quad p \geq 1 \quad (35)$$

$$K = K_1 + \sum_{i=1}^{n_k} \frac{y_i}{1 + q(1 - y_i)} \Delta K_i \quad q \geq 0 \quad (36)$$

$$\Delta K_i = K_i - K_1 \quad (37)$$

式中, $y_i (i = 3, 4, \dots, n_{\max})$ 为与刚度有关的人工变量。

2.2 优化模型

柔性铰链优化最初的混合整数规划模型, 即人工变量仅能取整数 $x_j, y_j = \{0, 1\}$, 可表达为

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(E, b, t, n) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{bt^3}{12R^3} \sum x_j E_j \sum y_i K_{0i} \delta \geq F \\ & \sigma_{f,g} \leq \sigma_{f,gmax} \\ & b_0 \leq b \leq b_{max} \quad t_0 \leq t \leq t_{max} \\ & \sum_{j=1}^{n_e} x_j = 1 \quad \sum_{i=3}^{n_{max}} y_i = 1 \\ & x_j, y_i \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (38)$$

式中, Φ 为目标函数, 可根据需要选择不同指标; σ_f 和 σ_{fmax} 分别为柔性单元的应力和其材料的最大许用应力; σ_g 和 σ_{gmax} 分别为连接点处应力及许用应力; $b_0, t_0, b_{max}, t_{max}$ 分别为 b 和 t 的最小值与最大值。

混合整数规划模型式(38)中的两个约束条件 $\sum x_j = 1$ 和 $\sum y_j = 1$ 能够保证最终有且仅有一种材料和一种几何构型被选择。通过刚度的插值表达, 优化模型中不再含有谐波函数项及与切口数 n 有关的求和表达式, 简化了模型的复杂程度。然而, 含有整型变量的优化模型存在求解效率的问题, 即无法采用基于梯度的优化算法。为此, 本文采用基于 SIMP 和 RAMP 插值函数, 即式(32)~(37), 将混合整数规划模型式(38)松弛为基于 SIMP 和 RAMP 的连续型优化模型, SIMP 模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(E, b, t, x_j, y_i) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{bt^3}{12R^3} \sum x_j^p E_j \sum y_i^p K_{0i} \delta \geq F \\ & \sigma_{f,g} \leq \sigma_{f,gmax} \\ & b_0 \leq b \leq b_{max} \quad t_0 \leq t \leq t_{max} \\ & \sum_{j=1}^{n_e} x_j = 1 \quad \sum_{i=3}^{n_{max}} y_i = 1 \\ & x_j, y_i \in (0, 1) \end{aligned} \quad (39)$$

RAMP 模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & \Phi(E, b, t, x_j, y_i) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{bt^3}{12R^3} \sum \frac{x_j}{1 + q(1 - x_j)} \sum \frac{y_i}{1 + q(1 - y_i)} \delta \geq F \\ & \sigma_{f,g} \leq \sigma_{f,gmax} \\ & b_0 \leq b \leq b_{max} \quad t_0 \leq t \leq t_{max} \\ & \sum_{j=1}^{n_e} x_j = 1 \quad \sum_{i=3}^{n_{max}} y_i = 1 \\ & x_j, y_i \in (0, 1) \end{aligned} \quad (40)$$

式(39)、(40)中, 两优化模型中所有设计变量均连续变化, 这使得模型可以采用基于梯度的优化方法求解, 计算效率得以提高。

2.3 模型求解过程

从图 8 中可以发现, 当惩罚因子较大时, 设计变量将很快逼近 0/1 值。实际中, 非常大的惩罚因子并不能保证得到满意的结果, 因为其惩罚作用使得设计变量很难变化, 而较小的惩罚因子又使得结果中出现很多中间变量值。为此, 本文采用逐渐增大惩罚因子的方法, 这既能保证设计变量有很大变化空间, 又能保证最优结果逼近离散值。具体过程

为: 针对逐渐增大的惩罚因子序列 p 或 q , 应用非线性规划方法, 求解一系列优化问题, 直到结果逼近离散值或达到最大迭代次数, 求解过程如图 9 所示。

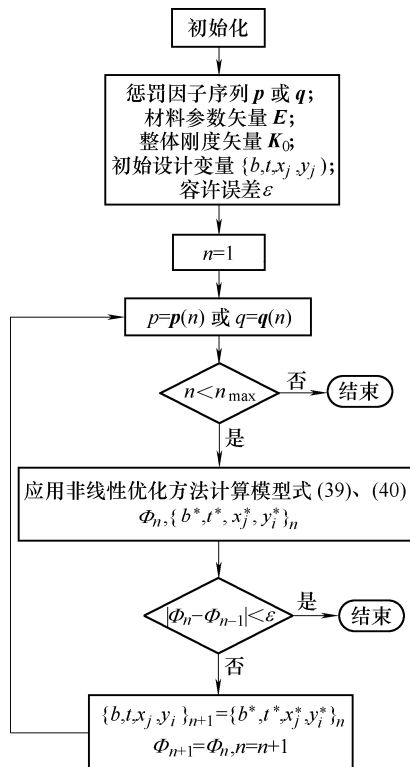


图9 优化算法流程图

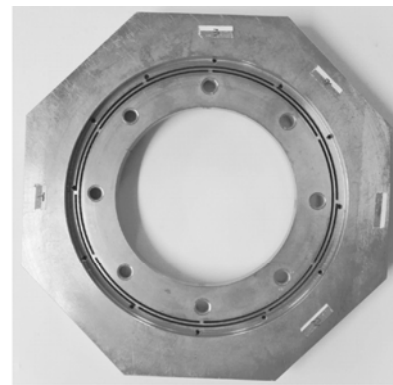
从图 9 中可以看出, 算法在每个迭代步中都需要求解一次连续非线性规划问题, 即模型式(39)或式(40), 这里采用基于梯度非线性优化求解器 SNOPT^[28]实现。

3 数值仿真与试验

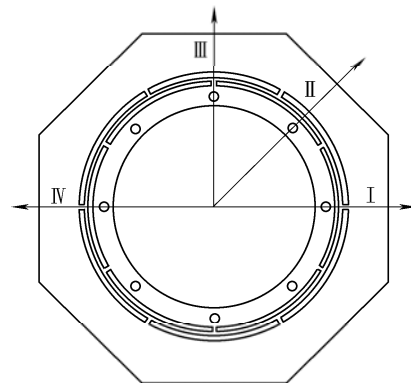
考虑如图 1 所示的环形柔性铰链, 铰链的设计需要考虑多方面因素, 如材料选择、工作环境、结构参数等。为了验证本文提出铰链的力学模型及优化设计算法, 进行了相应的仿真分析及试验, 具体内容如下。

3.1 环形柔性铰链刚度试验

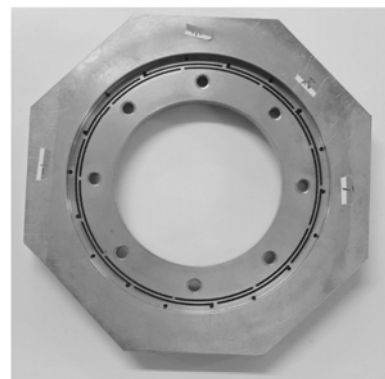
以如图 10a、10c 所示的 6 切口和 9 切口环形柔性铰链为例, 分别对其不同方向上(图 10b、10d 所示方向)的整体刚度进行试验测试, 以验证本文推导的铰链的力学模型。图 10b 所示为 6 切口铰链测试方向, 其中方向 I 和 IV 对称, 方向 I 和 III 反对称, 方向 II 为任意方向。图 10d 所示为 9 切口铰链测试方向, 其中方向 I 和 IV 反对称, 方向 II 和 IV 为任意两方向。铰链的刚度试验测试具体实施过程: 首先, 将铰链的内环通过螺钉与工装件固定, 内环与工装



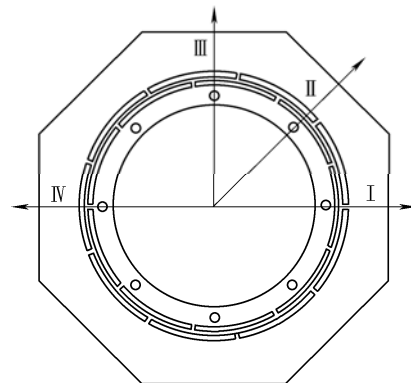
(a) 铰链 (6 切口)



(b) 测试方式 (6 切口)



(c) 铰链 (9 切口)



(d) 测试方式 (9 切口)

图10 环形柔性铰链试验件及测试方向

件之间存在轴孔配合, 保证了铰链外框架受拉力作

用时内环不会有相对位移;然后,采用拉力机分别对两个铰链依次在图示4个方向上施加拉力,拉力大小由力传感器 loadcell 测量并通过显示器读出,精度为 0.1 N;在施加拉力的同时,采用直线光栅尺测量输出位移,光栅尺的测量精度为 0.1 μm ,根据位移随力的变化计算得到铰链的刚度。环形柔性铰链试件材料为 TC4,材料及几何参数如表 1 所示,试验测试装置如图 11 所示。

表 1 试验件材料及几何参数

材料参数		几何参数	
弹性模量/GPa	114	切口数目	6/9
泊松比	0.3	柔性单元厚度/mm	0.5
密度/(kg/m ³)	4 400	半径/mm	47.75
		柔性单元面内宽度/mm	10

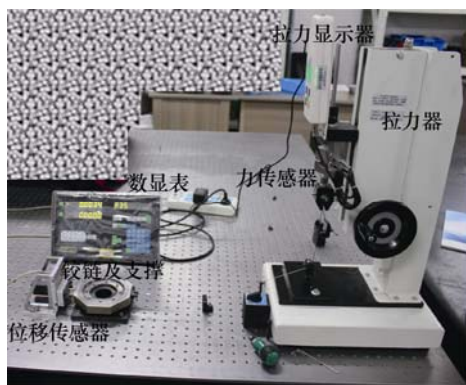


图 11 试验测试装置

依次沿图 10 所示的四个方向,分别对 6 切口和 9 切口铰链施加 0~300 N 和 0~400 N 拉力,采点间隔为 20 N,应用光栅尺测量侧边位移输出,在理论模型上进行同样的过程,测量和计算结果如图 12、13 所示。此外,由于柔性铰链试件切口采用线切割加工,考虑到加工误差,理论计算结果中除了柔性单元厚度为 0.5 mm 的铰链外,还给出了厚度为 0.45 mm 和 0.55 mm 的情况。

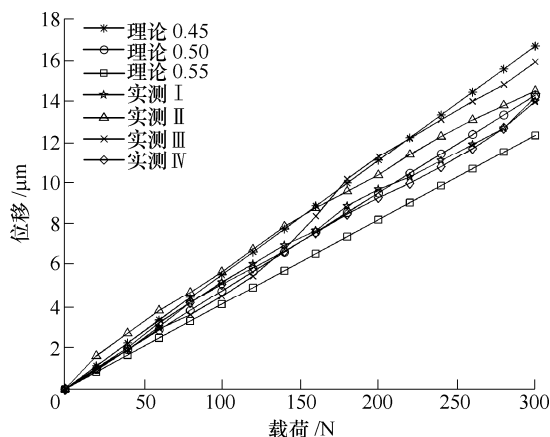


图 12 刚度测试数据——6 切口铰链

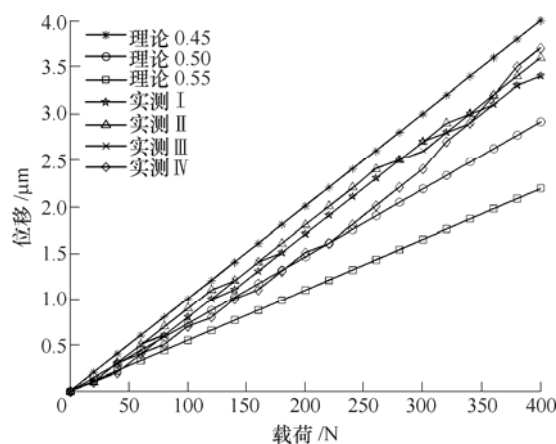


图 13 刚度测试数据——9 切口铰链

通过比较理论与试验结果可得出如下结论。

(1) 三个不同柔性单元厚度(0.45 mm, 0.50 mm, 0.55 mm)的位移数据曲线表明铰链的刚度对柔性单元厚度非常敏感。

(2) 理论计算结果与实测结果变化趋势一致,但还存在一定的偏差,且 9 切口铰链偏差大于 6 切口情况。产生偏差的原因是多方面的,但主要原因应该是切口厚度加工误差和铰链结构外框架的变形。铰链的整体刚度是在假设外框架为刚体的条件下推导而来的,而实际外框架在受到拉力时会产生一定的变形。从刚度推导过程可知,9 切口铰链刚度要明显大于 6 切口铰链,那么与 6 切口铰链测试结果相比,9 切口情况下外框架的变形对测试结果的影响将更明显。

(3) 在各个测试方向上,实测的位移数据基本一致,表明铰链在四个方向上具有相同的整体刚度,与理论分析一致。从变化曲线上,每个测试点处四个方向上的位移并不完全一致,这部分误差应该是操作读数误差和结构装配误差引起。从图 11 可以看出,测试所用拉力机为手动摇臂式,存在一定的操作误差,如稳定控制力的大小等。

3.2 柔性铰链优化设计仿真

以球面反射镜侧支撑为例,验证本文提出的用于离散优化的松弛方法。反射镜几何参数及材料参数如表 2 所示,反射镜的轴向支撑采用三点柔性杆支撑,径向支撑采用本文所研究的环形柔性铰链,铰链采用环氧树脂粘接在反射镜中孔重心平面处,如图 14 所示。由于本文研究的环形柔性铰链仅用于侧向支撑,轴向支撑细节以及对反射镜面形的影响不再深入考虑,将其近似为理想情况。反射镜支撑结构设计目标是得到尽可能高的面形精度,而面形精度很难用解析式表达,通常是采用有限元法

计算其变形，然后通过曲面拟合得到面形精度值^[14, 30-31]，这使得优化模型中无法直接利用面形精度作为目标函数或约束条件，而只能采用间接的方法。已有研究表明，随着反射镜与柔性铰链作用力的增大，反射镜面形精度变差。为此，本文以柔性铰链的弹性变形能为目标函数，这样能够同时考虑柔性铰链的相互作用力及柔性铰链切口数目对面形精度的影响，而这在已有文献中并未考虑。柔性铰链备选材料参数如表 3 所示，仅列举三种材料。

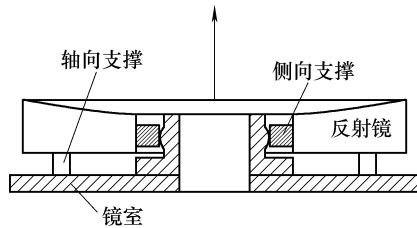


图 14 反射镜轴向支撑与侧向支撑

表 2 反射镜参数

材料参数		几何参数	
弹性模量/GPa	81	直径/mm	300
泊松比	0.3	曲率半径/mm	720
密度/(kg/m ³)	2 530	上表面曲率半径/mm	1 400
热胀系数/(10 ⁻⁶ /°C)	7.5	中孔直径/mm	99

表 3 铰链备选材料参数

	材料 1	材料 2	材料 3
弹性模量/GPa	70	114	150
泊松比	0.33	0.34	0.25
密度/(kg/m ³)	2 700	4 400	8 300

以铰链弹性变形能作为目标函数，将光轴最大位移作为约束条件，则优化模型可表达为

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} n K r \delta_T^2 \\ \text{s.t.} \quad & K \delta_{\max} \geq G (\delta_{\max} = 0.0005) \\ & \sigma_{f,g} \leq \sigma_{f,g\max} \\ & 0 \leq b \leq 15 \quad 0.3 \leq t \leq 0.5 \\ & \sum_{j=1}^{n_g} x_j = 1 \quad \sum_{i=3}^{n_{\max}} y_i = 1 \\ & x_j, y_i \in (0, 1) \end{aligned} \quad (41)$$

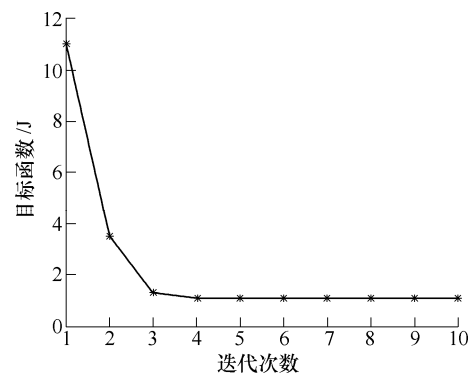
式中， δ_T 为温差为 ΔT 时反射镜中孔的径向变形， n 采用与刚度或材料一致的插值方法，即 $n = \sum y_i^p n_i$ 。

以柔性铰链切口数目 $n=5$ 情况为初始设计，首先调整厚度 t 和宽度 b ，使得光轴处于水平位置时，光轴偏移满足要求，并以此为初始设计参数。应用基于 SIMP 和 RAMP 密度函数的模型优化柔性铰

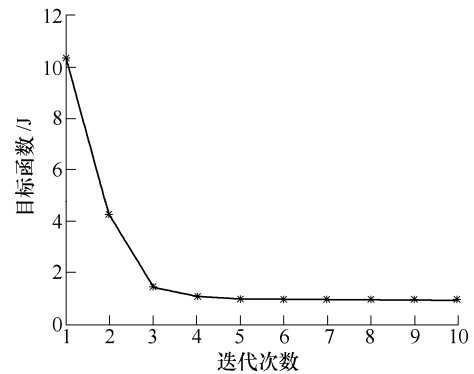
链，确定其最佳构型、材料及结构参数。初始参数与最佳参数如表 4 所示，优化迭代过程目标函数如图 15 所示，人工变量如图 16 所示。

表 4 初始及最佳参数

	初始参数	最佳参数	
		SIMP	RAMP
材料类型	2	3	3
切口数	5	6	6
宽度/mm	15	15	15
厚度/mm	1.5	0.5	0.5
光轴位移/mm	5×10^{-4}	6×10^{-4}	6×10^{-4}
面形误差/nm	25	21	21
PV 误差/nm	211	171	171
目标函数	8.75	0.96	0.96

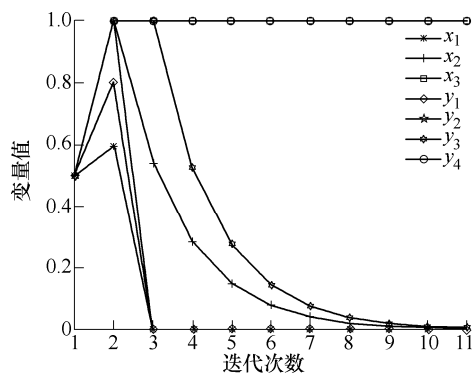


(a) SIMP 密度函数



(b) RAMP 密度函数

图 15 目标函数变化曲线



(a) SIMP 密度函数

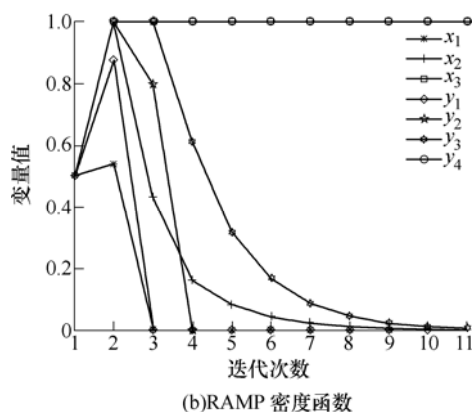


图 16 人工变量的变化曲线

从图 15 可以看出, 两个模型的目标函数均随着迭代次数的增加不断下降, 最终收敛, 且得到的最优结果基本一致。由图 16 可知, 在迭代开始阶段, 两类模型中的人工变量均出现了中间变量值, 但随着迭代次数不断增加, 中间变量值逐渐趋于离散 0/1 值。根据图 9 所示优化算法流程可知, 随着迭代次数的增加, 惩罚因子 p, q 也随之逐渐增大, 表明对中间变量的惩罚作用随着惩罚因子的增大而越来越明显。此外, 对初始结构和优化后的反射镜支撑结构进行有限元分析, 计算两种结构的镜面节点位移, 并计算镜面面形误差和 PV 值。比较发现, 反射镜的面形精度提高 16%, 镜面 PV 值提高 18%, 表明本文提出以柔性铰链的弹性变形能为目标函数能够间接反应反射镜的面形精度, 解决了面形精度无法解析表达的困难。

4 结论

本文研究了环形柔性铰链力学建模及优化设计问题, 推导了反射镜侧向支撑中所采用的环形柔性铰链的广义力学模型, 基于拓扑优化中所采用的密度插值函数, 建立了柔性铰链优化设计模型, 将考虑材料及几何构型的离散优化问题转化为连续优化问题, 并通过试验验证了铰链的力学模型, 通过有限元仿真验证了优化模型及算法。

试验测试结果表明: 铰链的整体刚度的理论结果与试验结果基本一致, 说明本文推导的理论模型能够用于描述该类型环形铰链的力学特性, 用作结构设计的参考。此外, 优化结果表明, 基于 SIMP/RAMP 密度插值函数的优化模型能够实现铰链材料和几何构型同时优化, 随着惩罚因子增大, 人工变量最终趋于 0/1 值。优化前后, 通过比较反射镜支撑结构有限元分析结果, 反射镜的面形精度较初始设计提高 15% 左右。

参 考 文 献

- [1] 于靖军, 裴旭, 毕树生, 等. 柔性铰链机构设计方法的研究进展[J]. 机械工程学报, 2010, 51(13): 2-13.
YU Jingjun, PEI Xu, BI Shusheng, et al. State-of-art of compliant mechanisms and their applications[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 51(13): 2-13.
- [2] 于靖军, 郝广波, 陈贵敏, 等. 柔性机构及其应用研究进展[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 53-68.
YU Jingjun, HAO Guangbo, CHEN Guimin, et al. State-of-art of compliant mechanisms and their applications[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 53-68.
- [3] ZUBIR M N M, SHIRINZADEH B, TIAN Y. Development of a novel flexure-based microgripper for high precision micro-object manipulation[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2009, 150: 257-266.
- [4] SCHWERTZ K, BURGE J. Field guide to optomechanical design and analysis[M]. Washington USA: SPIE Press, 2012.
- [5] PAROS J M, WEISBORD L. How to design flexure hinge[J]. Machine Design, 1965, 37: 151-157.
- [6] CAI K, TIAN Y, WANG F, et al. Development of a piezo-driven 3-DOF stage with T-shape flexible hinge mechanism[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 125-138.
- [7] XU Q. Design, testing and precision control of a novel long-stroke flexure micropositioning system[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 209-224.
- [8] YODER P R. Opto-mechanical systems design[M]. 3rd ed. Washington: CRC Press, 2006.
- [9] YODER P R. Mounting optics in optical instruments[M]. 2nd ed. Washington USA: SPIE Press, 2008.
- [10] FATA R, KRADINOV V, FABRICANT D. Flexure mounts for high-performance astronomical lenses[C]// Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy, May 25-29, 2006, Orlando, Florida, USA. Washington: SPIE Press, 2006: 62695T.
- [11] CULPEPPER M L. Design of quasi-kinematic couplings[J]. Precision Engineering, 2004, 28: 338-357.
- [12] 范磊, 张景旭, 吴小霞, 等. 大口径轻量化主镜边缘侧向支撑的优化设计[J]. 光学精密工程. 2012, 20(10): 2207-2213.
FAN Lei, ZHANG Jingxu, WU Xiaoxia, et al. Optimum design of edge lateral support for large aperture lightweight primary mirror[J]. Optics and Precision Engineering, 2012, 20(10): 2207-2213.
- [13] 曹玉岩, 王志臣, 周超, 等. 光学元件挠性支撑结构广

- 义建模及优化设计[J]. 光学精密工程, 2016, 24(11): 2792-2803.
- CAO Yuyan, WANG Zhichen, ZHOU Chao, et al. General modeling and optimal design of flexure supporting structure for optical components[J]. Editorial Office of Optics and Precision Engineering, 2016, 24(11): 2792-2803.
- [14] 于新峰, 巩岩, 倪明阳, 等. 基于运动学支撑的透镜光学表面面形及其复现性[J]. 光学精密工程, 2013, 21(08): 2000-2007.
- YU Xinfeng, GONG Yan, NI Mingyang, et al. Optical surface figure of lens under kinematic mount apparatus and its reproducibility[J]. Optics and Precision Engineering, 2013, 21(08): 2000-2007.
- [15] 赵磊, 巩岩. 光刻物镜中透镜高精度支撑结构的设计及分析[J]. 光学学报, 2012, 32(09): 224-229.
- ZHAO Lei, GONG Yan. Design and analysis for the high-precision lens support structure of objective lens for lithography[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(09): 224-229.
- [16] 马磊, 曹佃生, 刘承志. 大口径透镜多点柔性支撑结构设计与分析[J]. 光电工程, 2015, 42(05): 88-94.
- MA Lei, CAO Diansheng, LIU Chengzhi. Design and analysis on multi-points flexible supporting structure of large-aperture lens[J]. Opto-Electronic Engineering, 2015, 42(05): 88-94.
- [17] SMITH S T, BADAMI V G, DALE J S, et al. Elliptical flexure hinges[J]. Review of Scientific Instruments, 1997, 68: 1474-1483.
- [18] 吴鹰飞, 周兆英. 柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学, 2002, 19(06): 136-140.
- WU Yingfei, ZHOU Zhaoying. Design of flexure hinges[J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(06): 136-140.
- [19] YONG Y K, LU T F, HANDLEY D C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations[J]. Precision Engineering, 2008, 32: 63-70.
- [20] LOBONTIU N, CULLIN M. In-plane elastic response of two-segment circular-axis symmetric notch flexure hinges: The right circular design[J]. Precision Engineering, 2013, 37: 542-555.
- [21] LOBONTIU N, GARCIA E. Two-axis flexure hinges with axially-located and symmetric notches[J]. Comput. Struct., 2003, 81: 1329-1341.
- [22] KIHM H, YANG H S, MOON I K, et al. Adjustable bipod flexures for mounting mirrors in a space telescope[J]. Applied Optics, 2012, 51: 7776-7783.
- [23] 李宗轩, 陈雪, 张雷, 等. 大口径空间反射镜 Cartwheel 型柔性支撑设计[J]. 光学学报, 2014, 34(06): 218-226.
- LI Zongxuan, CHEN Xue, ZHANG Lei, et al. Design of Cartwheel flexural support for a large aperture space mirror[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(06): 218-226.
- [24] 赵磊, 彭海峰, 于新峰, 等. 具有整体径向挠性的光学元件多点均匀支撑结构[J]. 光电工程, 2015, 42(10): 43-48.
- ZHAO Lei, PENG Haifeng, YU Xinfeng, et al. Lens support structure of multi point equal supporting with wholly radical freedom[J]. Opto-Electronic Engineering, 2015, 42(10): 43-48.
- [25] SIGMUND O, MAUTE K. Topology optimization approaches[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48: 1031-1055.
- [26] BENDSØE P M, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69: 635-654.
- [27] REDDY J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis[M]. 2nd ed. New York: CRC Press, 2004.
- [28] HVEJSEL C F, LUND E, STOLPE M. Optimization strategies for discrete multi-material stiffness optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44: 149-163.
- [29] GILL P E, MURRAY W, SAUNDERS M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. SIAM Review, 2005, 47: 99-131.
- [30] 王志, 曹玉岩, 周超, 等. 柔性压电智能反射面的静态形状控制[J]. 光学精密工程, 2014, 22(10): 2715-2724.
- WANG Zhi, CAO Yuyan, ZHOU Chao, et al. Static shape control of flexible piezoelectric smart reflectors[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(10): 2715-2724.
- [31] 曹玉岩, 王志, 周超, 等. 压电智能反射面静态形状控制与作动器位置优化[J]. 航空学报, 2015, 36(02): 527-537.
- CAO Yuyan, WANG Zhi, ZHOU Chao, et al. Static shape control of piezoelectric smart reflector and optimization of actuators placement[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(02): 527-537.

作者简介: 曹玉岩, 男, 1986 年出生, 助理研究员。主要研究方向为柔性结构、有限元理论。

E-mail: yuyan_cao@126.com