

文章编号 1004-924X(2015)增-0425-07

具有三自由度的减薄直圆型柔性铰链柔度分析

郭 抗*,倪明阳,孙 振,陈华男,王东平

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 应用光学国家重点实验室
超精密光学工程研究中心,吉林 长春 130033)

摘要:针对并联机构中常用的柔性铰链一般需要在多个方向上加工,难以实现与机构一体化的问题,提出了一种减薄的直圆型柔性铰链。该铰链具有三个转动自由度,仅需在一个方向上即可完成加工,便于应用于结构一体化的定位机构中。根据卡氏第二定理,推导了减薄直圆型柔性铰链的柔度公式,利用有限元分析对柔度公式进行了验证,并分析了铰链的结构参数对其柔度的影响。讨论了该型铰链应用时柔度设计的两种情况。结果表明:铰链柔度的理论计算值与有限元分析值的最大偏差在 20%以内,对该型铰链柔度影响较大的结构尺寸依次是:厚度 b 、最小槽口间距 t 和圆角半径 r 。以上结论为具有三自由度的减薄直圆型柔性铰链的设计与应用提供了依据。

关键词:减薄直圆型柔性铰链;三自由度;柔度分析;卡氏第二定理

中图分类号:TH132;TP273 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/OPE.20152313.0425

Compliance analysis for thinned right-circular flexure hinge with three degrees of freedom

GUO Kang*, NI Ming-yang, SUN Zhen, CHEN Hua-nan, WANG Dong-ping

(*Engineering Research Center of Extreme Precision Optics, State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*)

* *Corresponding author, E-mail: guok@sklao.ac.cn*

Abstract: As common flexures in a parallel mechanism usually are machined in different directions, and it is difficult to integrate with a monolithic configuration, this paper proposes a thinned right-circular flexure hinge with three degrees of freedom. The flexure hinge can be fabricated merely along one direction, and is benefit for the spherical hinge applied in positioning mechanism with monolithic configuration. Based on Castigliano's displacement theorem, the compliance formulas of the thinned right-circular flexure hinge were derived. Finite element analysis was adopted to verify the compliance formulas and analyze the effect of the structure parameters on the compliance of the flexure hinge. Two cases on the compliance design for the application of the flexure hinge were discussed. The results show that the maximum variance between the theoretically calculated compliance value and the finite element analysis compliance value is within 20%. The parameters with the greatest impact on

收稿日期:2015-04-13;修订日期:2015-05-15.

基金项目:国家科技重大专项 02 专项资助项目(No. 2009ZX02005)

the compliance of the flexure hinge are the thickness b , the minimum notch spacing t , and the fillet radius r , successively. The above conclusions provide principles for the design and application of the thinned right-circular flexure hinge with three degrees of freedom.

Key words: thinned right-circular flexure hinge; three degrees of freedom; compliance analysis; Castigliano's displacement theorem

1 引言

柔性铰链以其结构简单、加工制造方便、无机械摩擦及间隙、运动精度高等优点,在微米及纳米级精密定位领域有着广泛应用^[1]。柔性铰链可以作为定位机构单体结构的一部分,与定位机构一体化加工制作,从而简化定位机构的装配过程,进一步提高定位机构的机械精度。

经过多年的研究与发展,柔性铰链已具有多种结构形式,可完成单自由度、二自由度或三自由度的移动或转动。其中,具有 3 个转动自由度的柔性铰链(简称柔性球铰)在可用作定位机构的并联机构中应用较多,如 Stewart 机构^[2-3]、6-PSS 机构^[4-6]、3-PRS 机构^[7]、8-SPS 机构^[8]等。

常用的柔性球铰主要有直圆型^[9-10]和倒圆角直梁型^[11]。上述两种主要通过车削加工制作。为了获得良好的柔性,柔性球铰切口部位的厚度较小,柔性球铰极易在车削力的作用下发生变形,使得柔性球铰难以达到较高的几何精度,降低柔性球铰的使用性能。为了减小柔性球铰的制作难度,将柔性球铰的圆形截面改为矩形截面^[12-13],采用线切割沿 2 个垂直方向加工制作。线切割加工时对柔性球铰的附加作用力小,可实现较高的加工精度。另一种方法是将圆形截面柔性球铰由一体式改为由中间圆轴和两端连接件组成的装配式^[14],可获得较大的运动行程。

上述几种柔性球铰若需作为定位机构的一部分,与定位机构一体化加工,受定位机构结构空间的限制,其加工难度将增加。圆形截面的柔性球铰需在多个方向上加工,矩形截面的柔性球铰需在 2 个垂直方向上加工,这都需要定位机构在设计时额外留出加工空间,增加了定位机构的结构复杂度。为了使一体化定位机构中柔性球铰的加工制造简单方便,本文提出仅需从 1 个方向即可完成加工的柔性铰链。该柔性铰链在常用的单轴直圆型柔性铰链的基础上,将单轴柔性铰链转轴

方向的结构减薄,使铰链在垂直于转轴的其他 2 个方向(次轴、纵轴)上也具备了转动自由度。相比前述柔性球铰,这种减薄直圆型柔性铰链,只需沿转轴方向铣削、钻孔、铰孔和线切割即可完成制作,有利于定位机构的一体化研制。该型柔性球铰已成功应用到作者所研制的 6-PSS 机构中^[15]。为了便于这种柔性球铰的设计与应用,本文推导了该型柔性铰链的柔度计算公式,并采用有限元分析验证了所推导公式的正确性,为这种具有三自由度的减薄直圆型柔性铰链的设计提供了理论依据。

2 柔性铰链的结构及受力模型

减薄直圆型柔性铰链如图 1 所示。铰链的初始转轴为 z 轴,铰链的转动部位在 z 方向减薄后,铰链在 x 方向(纵轴)和 y 方向(次轴)也具备了转动自由度。

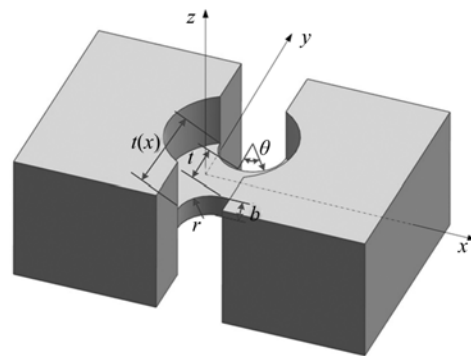


图 1 减薄直圆型柔性铰链的结构

Fig. 1 Structure of thinned right-circular flexure hinge

减薄直圆型柔性铰链的结构由最小槽口间距 t 、圆角半径 r 和厚度 b 决定。在 x 方向上的不同部位,槽口间距可表示为:

$$t(x) = t + 2[r - \sqrt{x(2r - x)}] (x \in [0, 2r]). \quad (1)$$

减薄直圆型柔性铰链的受力分析模型如图 2 所示。设铰链的右端 3 固定,左端 1 受轴向力 F_x , 剪切力 F_y, F_z , 弯矩 M_y, M_z 和扭矩 M_x 的作用,铰链可绕其几何中心 2 回转。铰链左端 1 处的位移-力方程为:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x,F_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{y,F_y} & 0 & 0 & 0 & C_{y,M_z} \\ 0 & 0 & C_{z,F_z} & 0 & C_{z,M_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{\theta_x,M_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\theta_y,F_z} & 0 & C_{\theta_y,M_y} & 0 \\ 0 & C_{\theta_z,F_y} & 0 & 0 & 0 & C_{\theta_z,M_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{CF}_i, \quad (2)$$

式中: \mathbf{C} 为铰链左端 1 处的 6×6 柔度矩阵,根据互易原理^[16]: $C_{y,M_z} = C_{\theta_z,F_y}$, $C_{z,M_y} = C_{\theta_y,F_z}$ 。

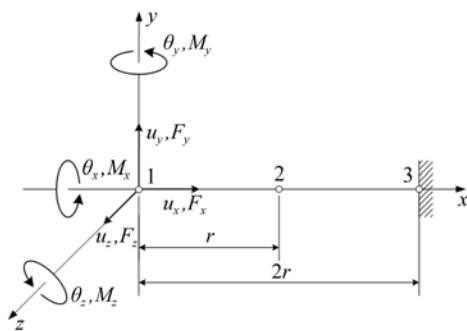


图 2 减薄直圆型柔性铰链受力分析

Fig. 2 Force analysis of thinned right-circular flexure hinge

3 柔性铰链的柔度模型

减薄直圆型柔性铰链的柔度计算公式与常用

单轴直圆型柔性铰链的柔度计算公式的推导过程相似。常用单轴直圆型柔性铰链的厚度 b 远大于最小槽口间距 t ,在柔度计算时往往忽略扭转和剪切的影响。减薄直圆型柔性铰的厚度 b 与最小槽口间距 t 相当,柔度计算时,扭转和剪切的影响不可忽略。

假设铰链各方向的变形均为线弹性小变形,铰链所用材料的弹性模量为 E ,剪切模量为 G 。根据卡氏第二定理^[16],柔性铰链左端 1 处的微位移为:

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}, \quad (3)$$

式中: U 为铰链的总应变能,可表示为:

$$U = \int_0^{2r} \frac{F_x^2}{2EA(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{\alpha F_y^2}{2GA(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{\alpha F_z^2}{2GA(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{M_x^2}{2GI_t(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{(M_y + F_z x)^2}{2EI_y(x)} dx + \int_0^{2r} \frac{(M_z + F_y x)^2}{2EI_z(x)} dx, \quad (4)$$

其中: α 为剪切形状系数,截面积 $A(x)$ 、极惯性矩 $I_t(x)$ 、惯性矩 $I_y(x)$ 和 $I_z(x)$ 均为沿 x 方向变化的函数,可表示为^[17]:

$$\begin{aligned} A(x) &= bt(x) \\ I_t(x) &= \begin{cases} bt(x)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{21t(x)}{100b} \right], & b \geq t(x) \\ b^3 t(x) \left[\frac{1}{3} - \frac{21b}{100t(x)} \right], & b < t(x) \end{cases} \\ I_y(x) &= \frac{b^3 t(x)}{12} \\ I_z(x) &= \frac{bt(x)^3}{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)式代入(3)式可得:

$$\begin{cases} u_x = C_{x,F_x} F_x, u_y = \left[C_{y,F_y} + \alpha \frac{E}{G} C_{x,F_x} \right] F_y + C_{y,M_z} M_z \\ u_z = \left[C_{z,F_z} + \alpha \frac{E}{G} C_{x,F_x} \right] F_z + C_{z,M_y} M_y, \theta_x = C_{\theta_x,M_x} M_x \\ \theta_y = C_{\theta_y,M_y} M_y + C_{z,M_y} F_z, \theta_z = C_{\theta_z,M_z} M_z + C_{y,M_z} F_y \end{cases}. \quad (6)$$

由(3)-(6)式可得,铰链的柔度矩阵 \mathbf{C} 为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eb} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{Eb} I_2 + \frac{\alpha}{Gb} I_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Eb} I_3 \\ 0 & 0 & \frac{12}{Eb^3} I_5 + \frac{\alpha}{Gb} I_1 & 0 & \frac{12}{Eb^3} I_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} I_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{Eb^3} I_6 & 0 & \frac{12}{Eb^3} I_1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{Eb} I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Eb} I_4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中: $I_1 = \int_0^{2r} \frac{dx}{t(x)}$, $I_2 = \int_0^{2r} \frac{x^2 dx}{t(x)^3}$, $I_3 = \int_0^{2r} \frac{xdx}{t(x)^3}$, $I_4 = \int_0^{2r} \frac{dx}{t(x)^3}$, $I_5 = \int_0^{2r} \frac{x^2 dx}{t(x)}$, $I_6 = \int_0^{2r} \frac{xdx}{t(x)}$, $I_7 = \int_0^{2r} \frac{dx}{I_t(x)}$ 。

在能够进行积分运算的数学软件(如 Matlab)中编制计算程序,可得到不同材料及结构尺寸条件下,减薄直圆型柔性铰链柔度矩阵的理论计算值。需注意的是,计算 I_7 时,若 $t < b < t + 2r$, 需采用分段积分。

4 柔度模型的有限元验证

采用有限元分析软件 ANSYS 12.0 建立减薄直圆型柔性铰链的有限元模型,如图 3 所示。分析得到,铰链所具有的 3 个转动自由度如图 4 所示。

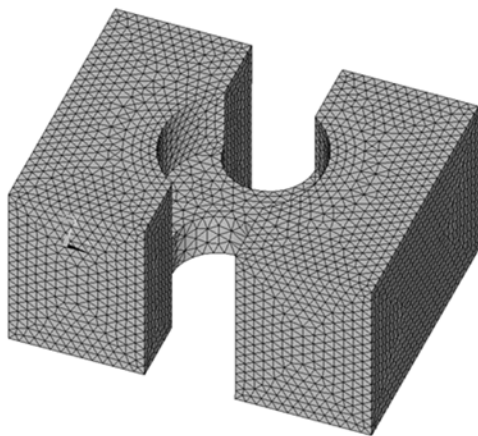


图 3 减薄直圆型柔性铰链有限元模型

Fig. 3 Finite element model of thinned right-circular flexure hinge

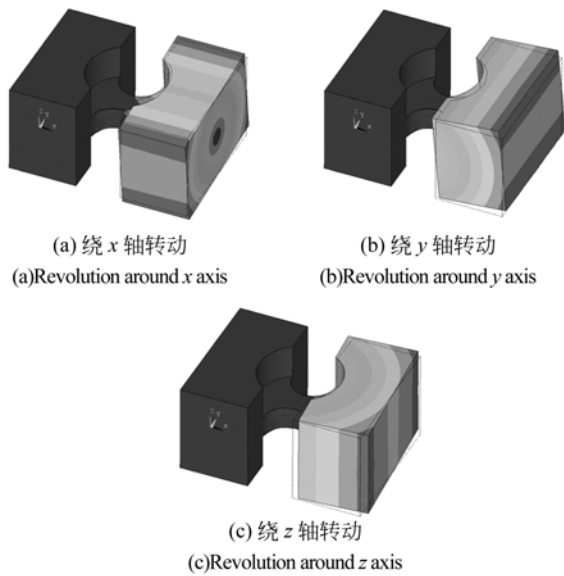


图 4 减薄直圆型柔性铰链的自由度

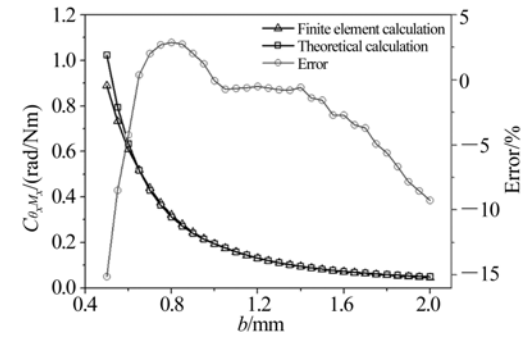
Fig. 4 Degrees of freedom of thinned right-circular flexure hinge

设铰链所采用的材料为 60Si2Mn 钢,其基本参数为: $E = 206 \text{ GPa}$, $\mu = 0.29$, $\rho = 7740 \text{ kg/m}^3$ 。当铰链的结构尺寸 $r = 2 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$ 时,取不同的 b 值,比较直圆型柔性铰链不同的减薄程度,铰链 3 个转动柔度的有限元分析与理论计算的结果,如图 5 所示。

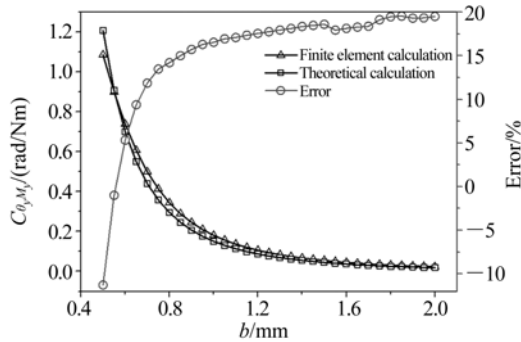
从图 5 可知,理论计算与有限元分析的最大偏差在 20% 以内。

5 柔性铰链的性能分析

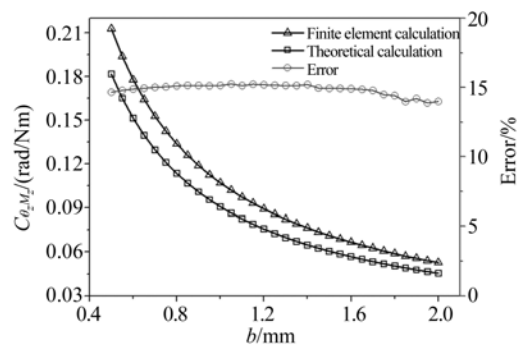
减薄直圆型柔性铰链的柔度随结构尺寸的变化规律如图 6 所示。各柔度随铰链厚度 b 减小而增大,随最小槽口间距 t 减小而增大,随圆角半径



(a) 绕 x 轴转动柔度 C_{θ_x, M_x}
(a)revolution compliance around x axis C_{θ_x, M_x}



(b) 绕 y 轴转动柔度 C_{θ_y, M_y}
(b)Revolution compliance around y axis C_{θ_y, M_y}



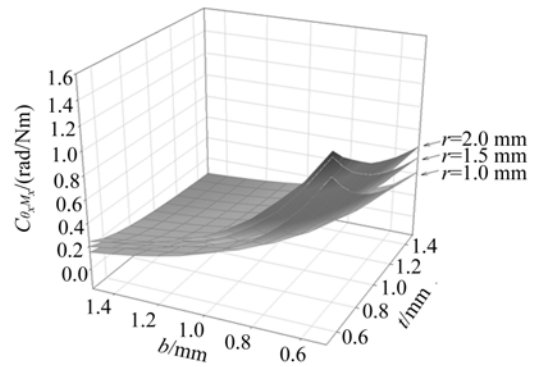
(b) 绕 z 轴转动柔度 C_{θ_z, M_z}
(b)Revolution compliance around z axis C_{θ_z, M_z}

图 5 减薄直圆型柔性铰链柔度的有限元分析结果与理论计算结果

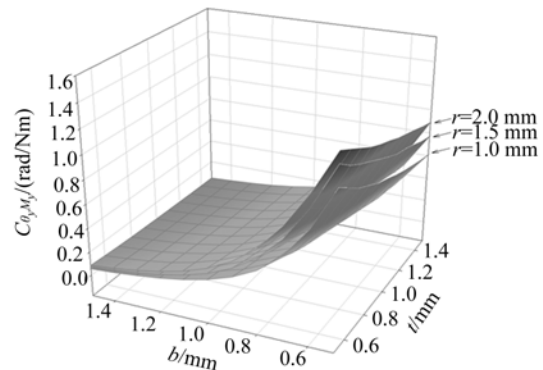
Fig. 5 Compliance calculation result of thinned right-circular flexure hinge by finite element analysis and theoretical calculation

r 增大而增大。各柔度与结构参数之间的变化规律均呈非线性。

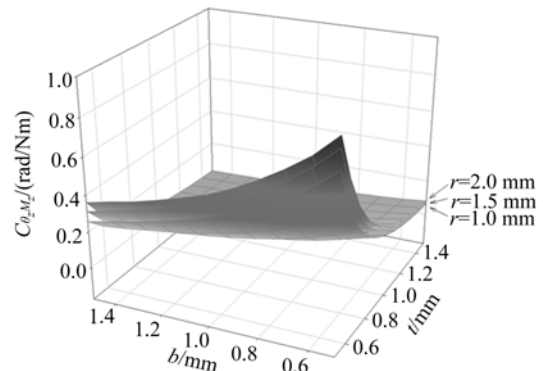
根据图 6 中曲线的变化趋势,总结铰链各结构参数对各柔度的影响程度如表 1 所示。综合来看,对减薄直圆型柔性铰链柔度影响最大的是铰链厚度 b ,其次是最小槽口间距 t ,圆角半径 r 影响最小。因此,在设计减薄直圆型柔性铰链时,可



(a) 绕 x 轴转动柔度 C_{θ_x, M_x}
(a)Revolution compliance around x axis C_{θ_x, M_x}



(b) 绕 y 轴转动柔度 C_{θ_y, M_y}
(b)Revolution compliance around y axis C_{θ_y, M_y}



(c) 绕 z 轴转动柔度 C_{θ_z, M_z}
(c)Revolution compliance around z axis C_{θ_z, M_z}

图 6 减薄直圆型柔性铰链柔度随结构参数的变化情况

Fig. 6 Compliance changes with the configuration parameters of the thinned right-circular flexure hinge

先根据加工能力和整体结构的尺寸限制,确定圆角半径 r ,再确定铰链的最小槽口间距 t 和厚度 b ,可减少设计过程中的反复计算。

表 1 结构参数对铰链柔度的影响程度比较

Tab. 1 Comparison of effect of configuration parameters on compliance of thinned right-circular flexure hinge

柔度	C_{θ_x, M_x}	C_{θ_y, M_y}	C_{θ_z, M_z}
影响最大	b	b	t
影响其次	t	t	b
影响最小	r	r	r

6 柔性铰链的柔度设计

将减薄直圆型柔性铰链作为柔性球铰应用时,一般要求其 3 个转动自由度的柔度值 C_{θ_x, M_x} 、 C_{θ_y, M_y} 、 C_{θ_z, M_z} 之间相差不大。对于减薄直圆型柔性铰链,当圆角半径 $r=2\text{mm}$ 时,3 个转动柔度之间的关系如图 7 所示。由于铰链的 3 个转动柔度受铰链厚度 b 和最小槽口间距 t 的影响程度各不相同,3 个转动柔度曲线两两之间存在交叉。利用这一现象,通过合理的尺寸设计,可以达到转动柔度值的设计要求。

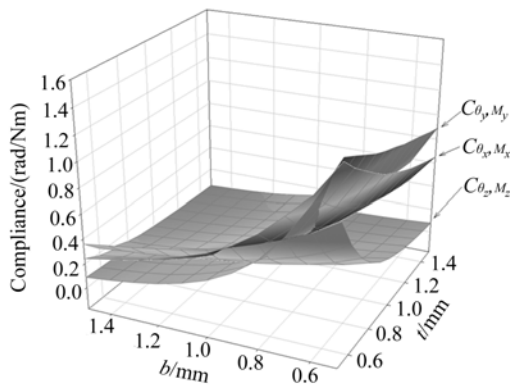


图 7 减薄直圆型柔性铰链 3 个转动柔度之间的关系
Fig. 7 Relationship among the three revolution compliances of thinned right-circular flexure hinge

常用的圆形截面或方形截面的柔性球铰,由于其截面的对称性,绕 y 轴的转动柔度 C_{θ_y, M_y} 和

绕 z 轴的转动柔度 C_{θ_z, M_z} 相等。对于减薄直圆型柔性铰链,当圆角半径 $r=2\text{mm}$ 时, C_{θ_y, M_y} 与 C_{θ_z, M_z} 之间的关系如图 8 所示。图中平面的左上部分区域内 C_{θ_z, M_z} 大于 C_{θ_y, M_y} , 右下部分区域内 C_{θ_y, M_y} 大于 C_{θ_z, M_z} , 两块区域的交界线处 C_{θ_y, M_y} 与 C_{θ_z, M_z} 相等, 交界线近似呈直线。即以 2 个成比例的幅度同时增大或减小铰链的厚度 b 和最小槽口间距 t , 可保持铰链绕 y 轴的转动柔度 C_{θ_y, M_y} 和绕 z 轴的转动柔度 C_{θ_z, M_z} 相等。

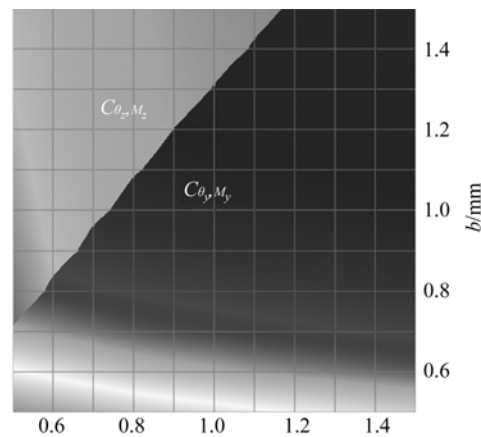


图 8 减薄直圆型柔性铰链 C_{θ_y, M_y} 与 C_{θ_z, M_z} 之间的关系
Fig. 8 Relationship between C_{θ_y, M_y} and C_{θ_z, M_z} of thinned right-circular flexure hinge

7 结 论

为了使柔性球铰便于与机构一体化加工制造,提出了一种减薄直圆型柔性铰链,验证了该铰链具备 3 个转动自由度。根据卡氏第二定理,推导了减薄直圆型柔性铰链的各柔度公式,并利用有限元分析对柔度公式进行了验证,结果表明,理论计算与有限元分析的最大偏差在 20% 以内。通过分析,明确了该型铰链的结构尺寸对柔度的影响大小依次是:厚度 b 、最小槽口间距 t 和圆角半径 r 。将上述结论用于指导该型柔性铰链的设计,讨论了该型铰链应用时柔度设计的两种情况。

参考文献:

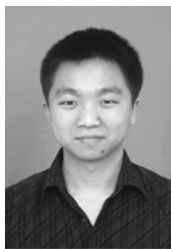
- [1] 吴鹏飞,周兆英. 压电驱动柔性铰链机构传动实现超精密定位[J]. 机械强度, 2002, 24(2): 157-160.
WU Y F, ZHOU ZH Y. Using piezoactuator and flexure hinge mechanism to achieve ultra precision

position [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2002, 24 (2): 157-160. (in Chinese)

- [2] BHASKAR D, MRUTHYUNJAVA T S. The Stewart platform manipulator: a review [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35: 15-40.

- [3] 金振林,张昭辉,高峰. Stewart 型指尖力传感器结构尺寸对其灵敏度的影响研究[J]. 计量学报, 2004,25(3):262-265.
JIN ZH L, ZHANG X H, GAO F. The effects of design parameters on the sensitivity of fingertip's force transducers based on Stewart platform [J]. *Acta Metrological Sinica*, 2004, 25(3): 262-265. (in Chinese)
- [4] 孙立宁,董为,杜志江. 基于几何非线性方法的大行程柔性并联机器人位置解[J]. 机械工程学报, 2005,41(10):71-74.
SUN L N, DONG W, DU ZH J. Kinematics analysis of a parallel manipulator with long travel range flexure hinges based on geometric nonlinear method [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(10):71-74. (in Chinese)
- [5] DONG W, SUN L N, DU ZH J. Stiffness research on a high-precision, large-workspace parallel mechanism with compliant joints [J]. *Precision Engineering*, 2008, 32: 222-231.
- [6] DU ZH J, SHI R CH, DONG W. Kinematics modeling of a 6-PSS parallel mechanism with wide-range flexure hinges [J]. *Journal of central south university of technology*. 2012, 19: 2482-2487.
- [7] SHIAU T N, TSAI Y J, TSAI M S. Nonlinear dynamic analysis of a parallel mechanism with consideration of joint effects [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, 43: 491-505.
- [8] YUN Y, LI Y M. Design and analysis of a novel 6-DOF redundant actuated parallel robot with compliant hinges for high precision positioning [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 61: 829-845.
- [9] 姚建涛,李立建,杨维,等. 直圆柔性球铰柔度矩阵的解析计算[J]. 光学精密工程, 2014, 22(7): 1857-1863.
YAO J T, LI L J, YANG W, et al. Analytical calculation of compliance matrix for right-circular flexure spherical hinge [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(7): 1857-1863. (in Chinese)
- [10] 杨春辉,刘平安. 圆弧型柔性球铰柔度设计计算[J]. 工程设计学报,2014,21(4): 389-392.
YANG CH H, LIU P A. Design and calculation of compliance of arc flexure spherical hinge [J]. *Chinese Journal of Engineering Design*, 2014, 21(4): 389-392. (in Chinese)
- [11] 杨春辉. 倒圆角直梁型柔性球铰柔度计算与分析[J]. 机床与液压,2013,41(3):55-58.
YANG CH H. Calculation and Analysis for Corner-filletted Flexure Spherical Hinge [J]. *Machine Tool & Hydraulics*, 2013, 41(3):55-58. (in Chinese)
- [12] 侯文峰,张宪民. 双轴矩形截面角圆形柔性铰链回转精度分析[J]. 机械工程学报,2010,46(17): 15-21.
HOU W F, ZHANG X M. Precision of rotation analysis of two-axis rectangular cross-section corner-filletted flexure hinges [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(17): 15-21. (in Chinese)
- [13] 曹锋,焦宗夏. 双轴椭圆柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学, 2007, 24(4): 178-182.
CAO F, JIAO Z X. Design of double-axis elliptical flexure hinges [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(4): 178-182. (in Chinese)
- [14] DONG W, DU ZH J, SUN L N. Conceptual design and kinematics modeling of a wide-range flexure hinge-based parallel manipulator [C]. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, 2005: 4031-4036.
- [15] 郭抗,巩岩. 6-PSS 型光学元件精密轴向调节机构[J]. 光学精密工程, 2013, 21(10): 2648-2655.
GUO K, GONG Y. Precise axial adjustment mechanism with 6-PSS type of optical elements [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2013, 21(10): 2648-2655. (in Chinese)
- [16] Nicolae Lobontiu. *Compliance mechanisms: design of flexure hinges* [M]. London: CRC Press, 2003.
- [17] YOUNG W C. *Roark's formulas for stress and strain* [M]. Seventh edition, New York:McGraw-Hill,2002.

作者简介:



郭 抗(1984—),男,湖北天门人,博士,副研究员,2006年、2008年、2011年于吉林大学分别获得学士、硕士、博士学位,主要从事光机结构超精密驱动与测试技术方面的研究。E-mail: guok@sklao. ac. cn



倪明阳(1985—),男,山东菏泽人,硕士,助理研究员,2007年、2009年于吉林大学分别获得学士、硕士学位,主要从事精密光机结构设计与装调等方面的研究。E-mail: nimy@sklao. ac. cn