

失调多腔镜型环形谐振腔共轭光轴位置精度分析

崔立红 颜昌翔 赵维宁 张新洁 胡春辉

Analysis of the positional accuracy of the self-conjugate ray in a misalignment multiple-mirror optical ring cavity

Cui Li-Hong Yan Chang-Xiang Zhao Wei-Ning Zhang Xin-Jie Hu Chun-Hui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 224210 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.224210

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224210>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I22>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高稳定性、高质量脉冲压缩飞秒光纤激光系统研究

Femtosecond fiber laser for high-stability and high-quality pulse compression

物理学报.2015, 64(16): 164207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.164207>

$Ba_{1-x}B_{2-y-z}O_4Si_xAl_yGa_z$  晶体和频可调谐深紫外飞秒激光器

Tunable deep ultraviolet femtosecond sum frequency laser based on  $Ba_{1-x}B_{2-y-z}O_4Si_xAl_yGa_z$  crystal

物理学报.2015, 64(16): 164205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.164205>

TmHo 双掺调 Q 激光系统理论与实验研究

Theoretical and experimental researches on Tm and Ho codoped Q-switching laser

物理学报.2014, 63(21): 214205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.214205>

基于 1064 nm 光纤皮秒种子源的 Nd:YAG 再生放大器

A Nd:YAG regenerative amplifier seeded by 1064 nm picosecond fiber

物理学报.2014, 63(13): 134207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.134207>

基于相位调制器与 Fabry-Perot 干涉仪的激光多普勒频移测量方法

Laser Doppler shift measuring method based on phase modulator and Fabry-Perot interferometer

物理学报.2013, 62(18): 184206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.184206>

## 失调多腔镜型环形谐振腔共轭光轴位置精度分析\*

崔立红<sup>1)2)</sup> 颜昌翔<sup>1)†</sup> 赵维宁<sup>1)2)</sup> 张新洁<sup>1)</sup> 胡春辉<sup>1)</sup>

1)(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033)

2)(中国科学院大学, 北京 100049)

(2015年4月28日收到; 2015年6月23日收到修改稿)

为了详细分析由多个反射镜构成的谐振腔内的闭合光轴(共轭光轴)的特性以及存在条件, 首先从光束传输坐标变换的角度, 分析了由多个平面镜所构成的谐振腔的共轭光轴存在条件, 得出了奇数平面镜谐振腔仅当平面镜间具有高精度的相同垂直度时才存在闭合光轴, 而偶数平面镜谐振腔总是存在闭合光轴的结论, 并给出了腔共轭轴随腔镜方向失调而产生的角度变化关系. 然后从矩阵光学的角度分析包含球面镜的谐振腔的共轭光轴在腔镜间传输时的方向变换问题, 具体分析了由两个平面镜和一个球面镜构成的三角形环形谐振腔的闭合共轭光轴存在的问题. 结果表明, 当不同的镜子出现角度偏差时, 腔内仍然存在闭合的共轭光轴, 并给出了对应的腔轴变化以及新谐振面的位置及方向. 由此表明由于球面镜的加入降低了谐振腔共轭轴存在性对平面镜间高精度平行度的要求, 为基于高品质光学无源腔的光谱测量技术的高精度装调工作提供了理论指导.

关键词: 光学测量, 光轴失调, 腔镜失调, 腔轴位置

PACS: 42.55.Ah, 42.60.-v, 42.62.-b

DOI: 10.7498/aps.64.224210

## 1 引言

基于传统测量方法的气体浓度探测灵敏度通常为 $1:10^4$ — $1:10^5$ <sup>[1]</sup>, 1988年, 由O'Keefe和Deacon<sup>[2]</sup>率先提出的腔衰荡光谱(cavity ring-down spectrometer, CRDS)测量技术因采用独特的衰荡时间测量方法, 探测灵敏度能达到 $1:10^7$ — $1:10^9$ 甚至更高, 并且测量结果不受激光器功率波动等条件限制, 这使得CRDS技术迅速得到广泛关注<sup>[3]</sup>. 近20年来, CRDS技术经历了不断的升级改造, 由脉冲腔衰荡光谱技术发展连续波腔衰荡光谱技术, 由测量一种气体的浓度发展到可实现同时测量三种以上气体的浓度<sup>[4]</sup>, 痕量气体的测量浓度下限也达到了ppb量级的探测灵敏度<sup>[5]</sup>.

在CRDS技术应用中, 根据朗伯比尔定律, 为了保证腔出射光衰减曲线呈单e指数衰减, 需要在激光器与谐振腔进行模式匹配时, 仅激发基模模式而避免高阶模式的激发<sup>[6,7]</sup>. 因为不同模式的高斯

光束的衰荡线型不同, 不能统一拟合成单一的e指数衰减曲线, 进而引入误差. 这就要求入射激光光束与谐振腔的闭合光轴良好对准, 此时对腔内闭合光轴位置的精确确定就显得尤为重要. 对于高品质无源腔的光轴位置的确定是保证测量原理得以可靠实现的关键. 还需指出的是, 多腔镜环形腔腔轴的存在以及闭合问题在激光陀螺方面也具有很高的研究应用价值<sup>[8]</sup>.

易亨瑜<sup>[9]</sup>根据光束传输变换规律和信号叠加方式, 利用最小二乘法进行数据拟合, 模拟了由两个球面镜构成的谐振腔腔长失调或腔镜倾斜条件下衰荡信号波形的变化情况; 文献<sup>[10, 11]</sup>给出了因腔镜位置失调而增长的附加衍射损耗, 在没有进一步考虑其他损失的情况下, 得出了腔内不设置光阑的谐振腔的衍射损耗值较小的结论; Al'tshuler等<sup>[12]</sup>从谐振腔腔镜位置的传输坐标矩阵角度, 给出了由平面镜构成的谐振腔的腔轴闭合问题的分析; Sheng<sup>[13]</sup>利用ABCD传输矩阵的方法, 在建

\* 国家高技术研究发展计划(批准号: 2011AA12A103)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yanxc@ciomp.ac.cn

立好的坐标系中, 将腔镜在  $x, y$  两个方向的角度偏移引进到变换传输矩阵中, 将变换传输矩阵写成  $6 \times 6$  阶形式, 并引进了一个评价失调灵敏度性质的灵敏度表达式, 对子午方向和弧矢方向的失调特性进行了数值分析, 得到了腔的失调特性与谐振腔本征高斯光束光斑半径的对应关系; 袁杰等<sup>[14]</sup>在 Sheng<sup>[13]</sup>的基础上, 引入了  $H$  参考变量, 将参考变量数由 4 个降为 3 个, 并将变换传输矩阵改写成  $5 \times 5$  阶形式, 重新给出灵敏度表达式, 并对 4 个方向的灵敏度进行了数值分析; 2013 年, 袁杰等<sup>[15]</sup>在以上研究的基础上, 建立了新的坐标系, 并对径向和轴向两个方向的灵敏度进行了分析, 但并没给出在装调过程中出现误差时腔内光轴可能出现的变化情况. 本文根据构成谐振腔的平面镜数的奇偶性和引入球面镜的影响, 给出了如何确定由多面镜子构成的谐振腔的本征光轴的理论方法, 为无源谐振腔的相关应用技术的发展提供了理论依据.

## 2 理论分析

### 2.1 平面镜谐振腔光轴的存在性

当光线入射到稳定的谐振腔内时, 若其在谐振腔内经所有镜面反射循环一周后与自身入射方向重合, 就将这个光线称为共轭光线, 即为谐振腔的闭合光轴. 因此, 对环形谐振腔内的共轭光线的存在性和存在条件的讨论, 可以转化为对腔内多面镜子构成的闭合光轴的求解分析.

设该光学系统由  $N$  个任意位置的平面镜(P1, P2,  $\dots$ , PN)构成. 在入射镜P1处建立右手坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  (图 1), 设镜子P1前的物点在坐标

系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  下的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 经过谐振腔内一系列的镜子 P1, P2,  $\dots$ , PN 的反射后所成的像为  $(x_n, y_n, z_n)$ , 每一面镜子对光线成像的作用可以用对应的镜面反射算符  $\hat{P}_j$  来表示, 则光线由位置  $(x_0, y_0, z_0)$  成像到  $(x_n, y_n, z_n)$  可以表示为以下一系列的操作矩阵:

$$(O_n X_n Y_n Z_n) = \hat{P}_n \hat{P}_{n-1} \cdots \hat{P}_1 (O_0 X_0 Y_0 Z_0), \quad (1)$$

操作矩阵  $\hat{K} = \hat{P}_n \hat{P}_{n-1} \cdots \hat{P}_1$ , 在欧氏空间总能写成以下形式:

$$\hat{K} = \hat{T}_{a\gamma} \hat{C}_\gamma \quad (\text{even } N), \quad (2)$$

$$\hat{K} = \hat{T}_r \hat{P}_A \hat{C}_{r_A} \quad (\text{odd } N), \quad (3)$$

式中,  $\hat{C}_\gamma$  代表旋转角度为  $\gamma$  的操作算符;  $\hat{T}_{a\gamma}$  代表平移操作算符, 平移量为  $a\gamma$ ;  $\hat{P}_A$  代表在平面  $P_A$  的平面镜反射操作算符;  $\hat{C}_{r_A}$  代表旋转角度为  $\gamma_A$  的操作算符, 其中  $\gamma_A \perp P_A$ ;  $\hat{T}_r$  代表平移操作算符, 其中平移向量  $r \in P_A$ . 这样以上描述的谐振腔的光轴满足<sup>[16]</sup>:

$$\hat{T}_{a\gamma} \hat{C}_\gamma E = E \quad (\text{even } N), \quad (4)$$

$$\hat{T}_r \hat{P}_A \hat{C}_{r_A} E = E \quad (\text{odd } N). \quad (5)$$

从偶数面镜子构成的操作矩阵可以看出存在这样的解: 光轴与旋转角向量  $\gamma$  方向重合一致. 值得考虑的是, 由四面镜子构成的谐振腔, 旋转向量  $\gamma$  与谐振腔的谐振面是垂直的. 这种情况下, 共轭光轴仅存在于  $\gamma = 0$  的条件下, 方程(4)的解所表示的操作矩阵  $K$  由平移操作矩阵构成, 这样本征轴方向向量为平移操作矩阵中特征值 1 对应的特征向量.

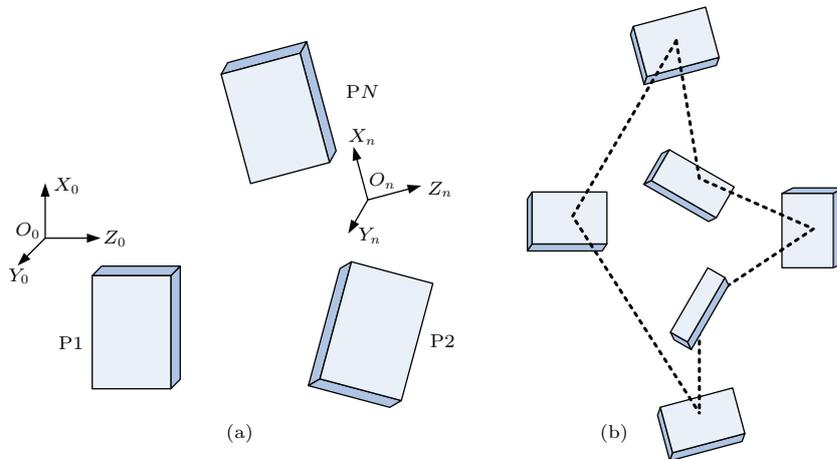


图 1 (a) 坐标系建立示意图; (b) 偶数平面构成的空间闭合光轴

Fig. 1. (a) Right-handed coordinate systems; (b) a self-conjugate ray of nonplanar resonator with an even number of mirrors.

我们现在分析方程(5)的解,它表示由奇数镜子构成的谐振腔.它的解遵循以下方程:通过在 $P_A$ 面上的平移操作矩阵 $\mathbf{r}$ 使得光轴 $\mathbf{E}$ 和操作矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_A \hat{\mathbf{C}}_{r_A} \mathbf{E}$ 平行,这样则要求当且仅当 $\mathbf{C}_{r_A} = \mathbf{E}$ .这即是说,不是所有由奇数面镜子构成的谐振腔均存在闭合光轴,只有当满足 $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{T}}_r \hat{\mathbf{H}}_A$ 时,光轴存在于操作面 $P_A$ ,并与向量 $\mathbf{r}$ 平行.

通过以上的推导可以得到以下两个结论:1)在由偶数镜子构成的非平面谐振腔总是存在一个闭合的光轴;2)在由奇数镜子构成的谐振腔,仅当镜子校准良好的情况下才存在闭合光轴.

### 2.2 由偶数镜子构成的谐振腔腔轴特性

以下具体分析由偶数平面镜构成的谐振腔光轴特性.在各个反射镜面处建立如图2所示的一系列右手坐标系 $O_i-X_iY_iZ_i$ , $O_iZ_i$ 轴是共轭光线方向, $O_iX_i$ 轴在入射面内,则 $O_iY_i$ 轴平行于镜面.入射光在第一面镜子处的参考坐标系为 $O_0-X_0Y_0Z_0$ ,在谐振腔内旋转一周后成像坐标系为 $O_n-X_nY_nZ_n$ ,这样当光轴闭合时,满足两者坐标系重合.

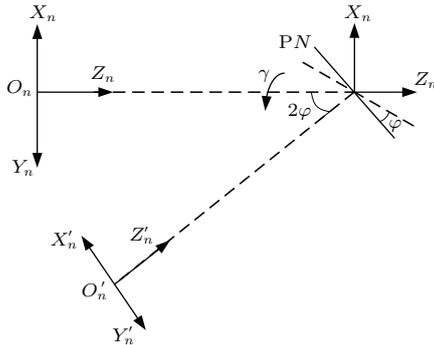


图2 在第一面镜子处的右手坐标系为 $O_0-X_0Y_0Z_0$ ,在谐振腔内旋转一周后成像坐标系为 $O'_n-X'_nY'_nZ'_n$

Fig. 2. A right-handed coordinate system  $O_0-X_0Y_0Z_0$  in which the  $O_0Z_0$  axis coincides with a self-conjugate ray and the  $O_0X_0$  axis lies in the plane of incidence of the ray and its image in the resonator mirrors is the system  $O'_n-X'_nY'_nZ'_n$ .

我们设PN镜面绕 $O_0Y_0$ 轴旋转 $\varphi$ ,则对应的代表反射光线特性的坐标系 $O_n-X_nY_nZ_n$ 在垂直于入射面内,相对于相同的轴应旋转 $2\varphi$ , $O_0-X_0Y_0Z_0$ 相对于光学系统成的新像为 $O'_n-X'_nY'_nZ'_n$ , $O'_n-X'_nY'_nZ'_n$ 和 $O_0-X_0Y_0Z_0$ 之间可以通过一个确定的光轴的旋转和偏移关系联系起来,旋转操作矩阵通过逐次关于 $O_0Z_0$ 轴旋转 $\gamma$ ,再关于 $O_0Y_0$ 旋转 $2\varphi$ 得到.通过对包含旋转操作矩阵的特征向量求解,即得到新的光学系统的闭合轴方向,该闭合轴

是在 $O_0-X_0Y_0Z_0$ 坐标系中表示的,整体分析求解过程如下.

第一次旋转,入射镜P1相对于 $Z_0$ 轴旋转 $\gamma$ , $Y_0$ 轴旋转 $2\varphi$ .当镜子出现角度偏折时,有以下的变换关系:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & 0 & \sin(2\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(2\varphi) & 0 & \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \cos \gamma - \cos(2\varphi) \sin \gamma & \sin(2\varphi) \sin \gamma & \sin(2\varphi) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin(2\varphi) \cos \gamma & \sin(2\varphi) \sin \gamma & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

可以得到以下两个方程:

$$\begin{cases} 1 - \cos(2\varphi) \cos \gamma x + \cos(2\varphi) \sin \gamma y \\ -\sin(2\varphi)z = 0, \\ -\sin \gamma x + (1 - \cos \gamma) y = 0. \end{cases} \quad (7)$$

闭合光轴方向即为变换矩阵的特征向量,则对新的变换方程(7)求解即可得到新的闭合光轴方向,求原闭合光轴 $O_0Z_0$ 与新闭合光轴两向量之间的夹角 $\alpha_z$ 即可得到新轴的角度变化表达式,如下所示:

$$\cos \alpha_z = \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi \cot^2 \gamma/2)^{-1/2}. \quad (8)$$

从(8)式可以看出,闭合轴角度的偏移与镜子的旋转角度和初始位置相关.

值得注意的是,以上反射面均假设为平面镜,若腔内含有球面镜,则情况会大不相同.当腔内存在球面镜时,由于球面镜的光线入射点(位置)发生变化会导致球面镜的法线方向发生变化,对应地将出现新的旋转变换和平移变换.接下来将对由两平面镜和一球面镜构成的三角形环形腔闭合光轴特性进行分析.

### 2.3 含球面镜的三角形谐振腔的闭合光轴的建模分析

#### 2.3.1 校准良好的光轴角度问题

对于校准良好的奇数镜谐振腔,存在闭合光轴的条件需满足(5)式的坐标变换关系以及结论.现在具体分析由两平面镜和一球面镜构成的奇数镜

谐振腔, 分析计算其腔内存在稳定闭合光轴时腔镜法线方向需满足的条件.

在三面镜子构成的谐振面上建立适宜的坐标系, 如图3(a)所示, 以两镜子的法平面为坐标平面, 建立右手坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$ , 其中,  $O_0Y_0$  轴垂直于法平面, 坐标系原点  $O$  为入射平面镜的入射点处,  $O_0Z_0$  轴为入射光轴方向, 则  $O_0X_0$  轴在入射面内.  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  分别为三面镜子的法线与  $O_0Z_0$

轴夹角, 设为锐角, 如图3(b)所示. 从腔镜间的闭合光轴的入射方向考虑, 设入射光线的方向向量为  $\mathbf{A}_1$  代表入射光线方向的单位向量, 经反射镜反射后的光线方向向量为  $\mathbf{A}_2$ , 对于平面反射镜  $P_N$  的光路,  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_N \mathbf{A}_1$ , 其中,  $\mathbf{P}_N$  为反射矩阵,  $\mathbf{P}_N = \mathbf{I} - 2\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ ,  $\mathbf{N}$  为平面反射镜的法线单位向量, 此时, 入射光线方向向量  $\mathbf{A}_1 = (0, 0, 1)^T$ .

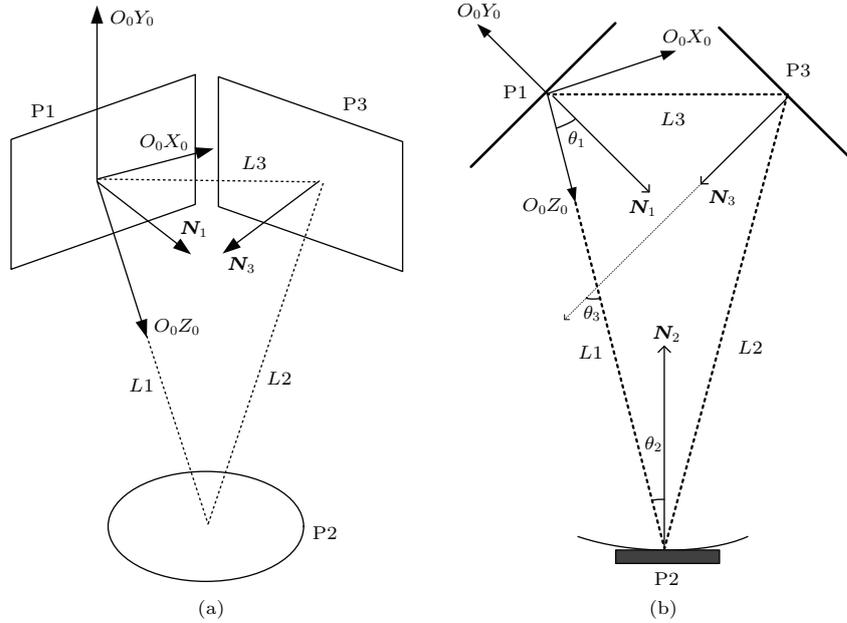


图3 (a) 三角形腔内坐标系建立示意图; (b) 三角形环形谐振腔校准良好时的闭合光轴情况

Fig. 3. (a) Coordinate system of triangle resonant cavity; (b) existence of a self-conjugate ray in triangle alignment resonant cavity.

平面镜  $P_1$  的法线方向向量  $\mathbf{N}_1$  为

$$\mathbf{N}_1 = (\sin \theta_1, 0, \cos \theta_1)^T. \quad (9)$$

设球面镜  $P_2$  的法线夹角为  $\theta_2$ , 则法线方向向量  $\mathbf{N}_2$  为

$$\mathbf{N}_2 = (\sin \theta_2, 0, -\cos \theta_2)^T; \quad (10)$$

平面镜  $P_3$  的法线夹角为  $\theta_3$ , 则其法线方向向量  $\mathbf{N}_3$  为

$$\mathbf{N}_3 = (-\sin \theta_3, 0, \cos \theta_3)^T. \quad (11)$$

这样光线在三面镜子中循环一周的光轴方向变化规律如下.

$\mathbf{A}_1$  经球面镜  $P_2$  反射有

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T) \mathbf{A}_1,$$

$\mathbf{A}_2$  经平面镜  $P_3$  反射有

$$\mathbf{A}_3 = (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_3\mathbf{N}_3^T) \mathbf{A}_2,$$

$\mathbf{A}_3$  再经平面镜  $P_1$  反射有

$$\mathbf{A}_N = (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T) \mathbf{A}_3.$$

则结合以上各式, 总的变化可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T) (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_3\mathbf{N}_3^T) \\ &\quad \times (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T) \mathbf{A}_1. \end{aligned} \quad (12)$$

将  $\mathbf{A}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  代入 (12) 式, 设

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} A_{N1} \\ A_{N2} \\ A_{N3} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

若腔内存在闭合光轴时, 需满足  $\mathbf{A}_N = \mathbf{A}_1$ .

光线在以上构成闭合回路的三个平面镜间循环一周, 所有镜子对光线的总的操作变换为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_N &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T) (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_3\mathbf{N}_3^T) \\ &\quad \times (\mathbf{I} - 2\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T). \end{aligned} \quad (14)$$

对该操作矩阵求特征值及对应的特征向量, 不难看出所得特征向量即为由三面镜子构成的谐振腔系统的闭合光轴方向. 计算得到特征值为 1, 1, -1, 对应的特征向量分别为

$$[0, 1, 0]^T, \tag{15}$$

$$[-2i/\{\exp[(2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3)i] - 1\} - i, 0, 1]^T, \tag{16}$$

$$[2i/\{\exp[(2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3)i] + 1\} - i, 0, 1]^T, \tag{17}$$

其中特征值 1 对应的列向量 (15) 式表示与  $O_0Y_0$  轴平行的方向, 即始终与谐振面垂直; 与特征值 -1 对应的特征向量 (17) 式, 表示经过镜面 P1 的反射光与入射光线反向, 与实际情况不符; 而与特征值 1 对应的另一个特征向量 (16) 式在谐振腔存在闭合光轴的条件下, 需满足  $A_{N1} = A_{N2} = 0$ , 即表示该方向的反射光经过各个镜面的反射操作矩阵后,  $A_N$  与  $A_1$  重合, 可得

$$\frac{-2i}{\exp[(2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3)i] - 1} - i = 0, \tag{18}$$

显然需满足

$$\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 = \pi/2. \tag{19}$$

而在该系统设的坐标系中,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  为与  $O_0Z_0$  轴夹角, 三角形的闭合回路中, 三个镜子的法线方向向量  $N_1, N_2, N_3$  满足  $(N_1 - N_2) \times N_3 = 0$ , 可以构成闭合回路. 以上说明, 以入射镜 P1 为参考, 以两平面镜的法平面与球面镜球心构成的平面为坐标平面. 三面镜子构成闭合回路的条件为 (18) 式, 其中  $\theta_1$  为入射平面镜 P1 的法线与入射光轴的夹角. 应指出的是, 以上的求解过程只包含谐振腔内闭合光轴在镜子间的角度变化问题, 在镜子装调过程中还需考虑有角度构成的闭合光路长度问题, 但是对于镜子间长度的确定并不惟一, 闭合光轴角度固定后, 谐振腔臂长可成比例变化.

需要说明的是, 对于由三面反射镜构成的谐振腔, 其闭合光轴显然会构成三角形, 但是以上过程可以推广到由多面镜子构成的谐振腔的腔镜角度确定问题上, 适用于空间立体多边形闭合光轴的求解, 如图 1(b) 所示.

### 2.3.2 入射平面镜 P1 的角度偏移

对于平面镜的角度偏移, 从镜子本身角度可以分为摆动、俯仰、自旋三种情况. 其中, 自旋角不影响镜子的反射特性. 在已建立的坐标系内, 可以将

平面镜角度的偏移分为在谐振面内的摆动偏移以及垂直于谐振面的俯仰偏移, 下文进行详细分析.

现在先分析入射平面镜出现水平摆角时, 即绕着  $O_0Y_0$  方向旋转  $\Delta\beta$ , 本文设定旋转角顺时针旋转为正, 逆时针旋转为负. 对应地, 在球面镜上的入射光点将在其上出现水平方向的平移, 则球面镜的法线方向将出现水平偏角, 相应地绕着  $O_0Y_0$  轴旋转  $\Delta\beta_R$ . 应该注意的是, 球面镜法线方向的变化不仅与平面镜的偏转有关, 还与新的闭合光轴方向有关, 新轴的方向决定球面镜的法线方向. 设新轴与原轴的夹角为  $\alpha$ , 如图 4 所示.

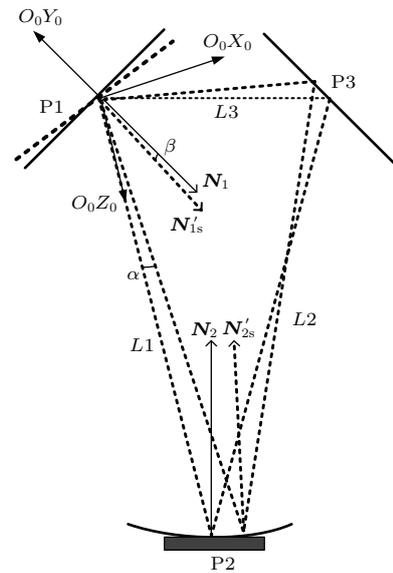


图 4 平面镜 P1 在谐振面内出现绕  $O_0Y_0$  轴旋转摆角误差的情况

Fig. 4. Plane P1 rotation about the  $O_0Y_0$  axis through an angle.

三个镜子的法线方向分别为  $N_1, N_2, N_3$ , 光路中三个分臂长分别为  $L1, L2, L3$ , 总的腔长为  $L$ ,  $L = L1 + L2 + L3$ , 球面镜半径为  $R$ , 球心位置为  $R_0$ . 结合角方向的定义, 不难分析出闭合光轴在腔内循环一周, 在球面镜处相应的水平偏转角与轴的偏角的关系应与腔的总长有以下关系:

$$\Delta\beta_R = -\frac{L}{R}\alpha, \tag{20}$$

则总的变换矩阵在原始坐标系中的表达式为

$$N'_{1s} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\beta & 0 & \sin \Delta\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta\beta & 0 & \cos \Delta\beta \end{pmatrix} N_1,$$

$$\mathbf{N}'_{2s} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\beta_R & 0 & \sin \Delta\beta_R \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta\beta_R & 0 & \cos \Delta\beta_R \end{pmatrix} \mathbf{N}_2, \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_N = (\mathbf{1} - 2\mathbf{N}'_{1s}\mathbf{N}'_{1sT})(\mathbf{1} - 2\mathbf{N}_3\mathbf{N}_3T) \times (\mathbf{1} - 2\mathbf{N}'_{R2s}\mathbf{N}'_{R2sT}) \quad (22)$$

该操作矩阵对应的特征值为 1, 1, -1, 对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 \sin(\Delta\beta + \Delta\beta_R + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3)^2, 0, \\ -\sin(2\Delta\beta + 2\Delta\beta_R + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3) \end{pmatrix}^T, \quad (23)$$

$$(0, 1, 0)^T, \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(2\Delta\beta + 2\Delta\beta_R + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3), 0, \\ 1 - 2 \cos(\Delta\beta + \Delta\beta_R + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3)^2 \end{pmatrix}^T. \quad (25)$$

由以上特征向量可以很明显地看出, 与特征值 1 对应的特征向量 (23) 式是闭合光轴的方向. 还需指出的是, 对于偏转角绕轴方向, 逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负. 新轴与原轴的夹角为  $\alpha$ , 则

$$\cos \alpha = \cos \left( 2\Delta\beta - \frac{2L}{R}\alpha + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3 \right). \quad (26)$$

结合 (13) 和 (17) 式, 可以求得

$$\alpha = \frac{2R}{2L + R}\Delta\beta. \quad (27)$$

偏角的大小与新轴的角度变化的对应关系如表 1 所列.

表 1 列出了平面镜的摆角误差与新轴的方向偏差的关系, 其中  $R$  与  $L$  的取值还需保证谐振腔为稳定腔, 表 1 中取  $R = 1000$  mm,  $L = 410$  mm ( $L_1 = L_2 = 200$  mm,  $L_3 = 10$  mm), 在实际中的误差为  $20''$  左右.

下面研究平面镜的俯仰角的影响. 为了计算方便, 设所构成的三角形谐振腔光轴在镜面之间的臂长  $L_1 = L_2 = L_3$ , 这样可将 (6)—(8) 式具体写为

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= (\sin \theta_1 \ 0 \ \cos \theta_1)^T \\ &= (\sin(\pi/6) \ 0 \ \cos(\pi/6))^T \\ &= (1/2 \ 0 \ \sqrt{3}/2)^T, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 &= (\sin \theta_2 \ 0 \ -\cos \theta_2)^T \\ &= (\sin(\pi/6) \ 0 \ -\cos(\pi/6))^T \\ &= (1/2 \ 0 \ -\sqrt{3}/2)^T, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_3 &= (-\sin \theta_3 \ 0 \ \cos \theta_3)^T \\ &= (-\sin(\pi/2) \ 0 \ \cos(\pi/2))^T \\ &= (-1 \ 0 \ 0)^T. \end{aligned} \quad (30)$$

对于平面镜的俯仰角, 可以看成绕谐振面上的某一轴旋转, 从坐标系的选择来看, 旋转轴在  $X_0O_0Z_0$  面上, 方向垂直于镜子法向量  $\mathbf{N}_1$ , 旋转轴单位向量  $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ , 旋转角度为  $\phi$ . 本文中  $r_x = -\sqrt{3}/2, r_y = 0, r_z = 1/2$ . 旋转时先把  $r$  轴变成  $O_0X_0$  轴, 再旋转  $\phi$ , 然后变换回来, 得到的合成矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \cos \phi + (1 - \cos \phi)r_x^2 & (1 - \cos \phi)r_xr_y - r_z \sin \phi & (1 - \cos \phi)r_xr_z + r_y \sin \phi \\ (1 - \cos \phi)r_xr_y + r_z \sin \phi & \cos \phi + (1 - \cos \phi)r_y^2 & (1 - \cos \phi)r_yr_z - r_x \sin \phi \\ (1 - \cos \phi)r_xr_z - r_y \sin \phi & (1 - \cos \phi)r_yr_z + r_x \sin \phi & \cos \phi + (1 - \cos \phi)r_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 \cos \phi & 1 - 3/4 \cos \phi & \sqrt{3}/4(\cos \phi - 1) \\ 1/2 \sin \phi & \cos \phi & \sqrt{3}/2 \sin \phi \\ \sqrt{3}/4(\cos \phi - 1) & -\sqrt{3}/2 \sin \phi & 1/4 + 3/4 \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

表 1 偏角与新轴的角度变化的对应关系

Table 1. Intersection angle of the new self-conjugate ray corresponding  $\Delta\beta$ .

	$\Delta\beta$					
	$-40''$	$-20''$	$20''$	$40''$	$1'$	$2'$
$\alpha$	$-43.96''$	$-21.98''$	$21.98''$	$43.96''$	$1.01'$	$2.20'$
$\Delta\beta_R$	$32.80''$	$16.40''$	$-16.40''$	$-32.80''$	$-0.82'$	$-1.64'$

则  $\mathbf{N}'_1 = \mathbf{R} \times \mathbf{N}_1$ , 而此时对于球面镜来说, 球面镜的法线方向变化的确定与新谐振面方向有关, 还与轴的方向有关. 由前文理论可知, 新的谐振面应为包含球面镜球心的两平面镜的公共法平面, 即若平面镜发生俯仰角后仍可以形成闭合光轴, 且闭合光轴惟一. 新的法平面的解析方程为

$$f_N(x, y, z) = \begin{cases} \mathbf{N}'_1 [x, y, z]^T = 0, \\ \mathbf{N}_3 [x, y, z]^T = 0, \end{cases} \quad (32)$$

$$R_0 \in S_N(x, y, z). \quad (33)$$

方程 (32) 表示的是两平面镜平面的交线方向, 该方向为公共法平面的法线方向, 再根据球心位置 (33) 式即可确定唯一的法平面  $S_N$ , 由此可求得新的谐振面与球面镜的交线, 进一步确定较理想的球面镜入射点, 从而确定球面镜的法线方向. 如上文所述的方法求得新操作矩阵的特征向量, 即可确定在球面镜处较理想的入射点对应的新的闭合光轴的方向, 几何关系如图 5 所示.

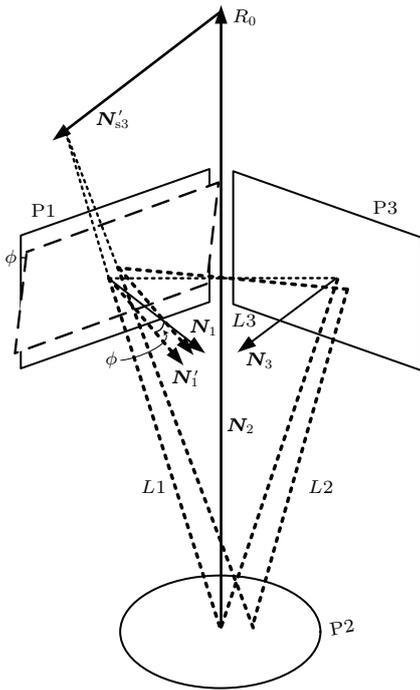


图 5 平面镜 P1 在垂直于谐振面内出现俯仰偏角情况  
Fig. 5. Plane P1 tilt an angle perpendicular to the plane of resonance.

通过以上的坐标解析关系可以确定新的谐振面, 也可以通过几何位置关系确定. 由于两个谐振面都要经过同一球心, 则不难确定两谐振面的交线通过球心  $R_0$ , 并且新的谐振面仍然为镜子 P2 的法平面, 这说明新的谐振面是原谐振面绕球心  $R_0$ ,

方向平行于镜子 P3 的法线方向  $\mathbf{N}_3$  的轴  $\mathbf{N}'_{s3}$  旋转得到的 ( $\mathbf{N}'_{s3} // \mathbf{N}_3$ ). 因此, 根据新谐振面仍然过球心  $R_0$  即可以确定轴的方向及位置, 求得与  $\mathbf{N}'_1$  和  $\mathbf{N}_3$  都垂直的单位向量方向, 即为新谐振面的法线向量. 其中,  $\mathbf{N}'_1 = (1/2 \cos \phi \sin \phi \sqrt{3}/2 \cos \phi)^T$ ,  $\mathbf{N}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ . 设新的谐振面的法线方向为

$$\mathbf{c}_e = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{N}'_1 \times \mathbf{N}_3}{|\mathbf{N}'_1 \times \mathbf{N}_3|}, \quad (34)$$

是同时垂直于  $\mathbf{N}'_1, \mathbf{N}_3$  的单位向量, 由此可得到新的谐振面的法线方向为

$$\mathbf{c}_e = \left( \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi}} \quad \frac{-\cos \phi}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi}} \quad 0 \right)^T, \quad (35)$$

得到原谐振面的法线方向与新谐振面的法线方向的夹角为

$$\cos \omega = \frac{-\cos \phi}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi}}, \quad (36)$$

即新谐振面是原谐振面绕着过  $R_0$  的方向为  $\mathbf{N}_2$  的交线轴旋转  $\omega$  得到的.

现在分析谐振面与偏移后的平面镜的角度关系. 新谐振面与平面镜 P1' 的交线确定入射光线的位置, 与球面镜的交线可以确定在球面镜的位置,  $\mathbf{N}'_1$  与  $\mathbf{N}_3$  在新谐振面上的夹角为两平面镜的法线夹角. 可以求得  $\mathbf{N}'_1$  与  $\mathbf{N}_3$  在新谐振面上的夹角与在原谐振面上  $\mathbf{N}_1$  与  $\mathbf{N}_3$  的夹角变化值相当于原谐振面的平面镜 P1 的摆角变化, 新轴在新谐振面上的方向求解与本节前文中解法相同, 在此不再赘述.

综合以上结果说明, 由于球面镜的加入, 当球面镜尺寸足够大、平面镜装调出现垂直误差时, 仍然存在闭合光轴. 新谐振面的法线方向为 (35) 式, 与原谐振面的关系为 (37) 式, 说明由于球面镜的存在, 自动补偿了两平面镜的相对不垂直度.

### 2.3.3 球面镜 P2 的角度偏移影响

当球面镜在谐振面内发生左右摆角时, 如图 6 所示, 闭合光轴在谐振面内发生对应的角度变化, 其规律与平面镜的摆角变化类似. 但需说明的是, 球面镜在谐振面上的位置可以通过球心位置来惟一确定, 当球心在谐振面上的位置偏移时, 可以分解为对谐振腔腔长失调的影响和对闭合光轴方向的影响. 对腔长的影响需从谐振腔的谐振频率的角度考虑, 本文仅考虑球面镜的微小偏移对闭合光轴方向的影响. 当球面镜球心位置在坐标平面方向上发生位置偏移时, 则相当于球面镜

法线方向在  $O_2Z_2X_2$  面上绕  $O_2Y_2$  轴旋转  $\varepsilon_1$ , 其中  $O_2-X_2Y_2Z_2$  为在球面镜处建立的参考坐标系. 如前文所述, 当腔轴在球面镜的入射方向发生变化 ( $\delta$ ) 时, 在球面镜处对应的法向量也将发生变化, 设为  $\varepsilon_2$ ; 再根据角方向的定义, 同 (20) 式得两者变化角的关系为  $\varepsilon_2 = -\frac{L}{R}\delta$ , 则总的变化  $\varepsilon$  为

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (37)$$

则球面镜的法线方向旋转矩阵为

$$MR_1 = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (38)$$

这样,  $N_2$  变化为  $N'_{R2} = MR_1 \times N_2$ , 则球面镜的反射矩阵为  $1 - 2N'_2N'^T_2$ , 再从变换矩阵的特征向量的角度考虑, 显然镜子间的角度变换满足:

$$A_N = (1 - 2N_1N^T_1)(1 - 2N_3N^T_3)(1 - 2N'_{R2}N'^T_{R2})A_1. \quad (39)$$

同理, 可以求得新的坐标轴方向与原坐标轴的夹角以及对于球面镜左右偏转的灵敏度.

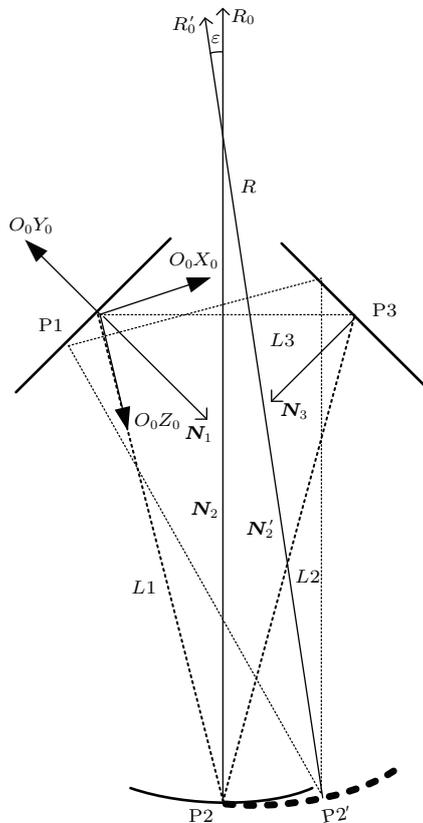


图6 球面镜 P2 的球心位置在谐振面内出现误差时的情况  
Fig. 6. Offset of the centre of spherical mirror P2 in the plane of resonance.

可求得特征值分别为 1, 1, -1, 对应的特征向量为

$$(0, 1, 0), \quad (40)$$

$$\left( \frac{2 \sin^2(\varepsilon + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3)}{\sin(2\varepsilon + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3)}, 0, 1 \right), \quad (41)$$

$$\left( \frac{-2 \cos^2(\varepsilon + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3)}{\sin(2\varepsilon + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3)}, 0, 1 \right). \quad (42)$$

因为都是在原坐标系  $O_0-X_0Y_0Z_0$  下, 求得矩阵的特征向量即可求出新光轴的变化角度, 也就是新轴的新方向, 所求得新方向的角度就是夹角. 显然, 第一列对应的为  $O_0Y_0$  轴, 第三列反向, (41) 式为闭合光轴新方向. 结合 (13) 和 (37) 式与原闭合光轴的夹角关系为

$$\cos \delta = \sin(\varepsilon + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3), \quad (43)$$

$$\delta = \varepsilon_1 \left( \frac{R}{R + L} \right). \quad (44)$$

当球面镜球心在垂直于谐振面上发生位置偏移时, 球面镜的法线方向在平行于谐振面上发生偏转, 新的谐振面相对于原谐振面仅在谐振面法线方向发生平移, 光轴相对于平面镜 P1 的入射方向不变. 在此不再做详细分析.

### 3 总结与展望

本文根据镜面反射理论详细分析了谐振腔内本征闭合光轴情况, 得到以下结论: 对于由平面镜构成的谐振腔, 其光轴特性与构成镜子的个数有关; 对于由偶数平面镜构成的谐振腔, 其本征闭合光轴总是存在的; 而由奇数平面镜构成的谐振腔, 仅当其在同一个平面内校准良好时存在闭合光轴<sup>[17]</sup>. 但是, 当构成谐振腔的镜子中包含球面镜时, 以上结论将发生改变. 对由两平面镜和一球面镜构成的谐振腔进行分析得到以下结论: 当平面镜或球面镜法线在谐振面内发生角度偏差时, 闭合光轴仅在原谐振面内变化; 当平面镜在垂直于谐振腔内出现角偏差时, 谐振面将出现角度偏差如 (36) 式所示, 新的谐振面为包含球心的在两平面镜的公共法平面. 则由以上结论可知, 由于球面镜的存在, 使得腔内闭合光轴的存在性对平面镜间的相对垂直度的要求降低, 更便于装调.

目前基于高精度光学无源腔发展起来的高精度光谱测量技术有腔增强光谱测量技术<sup>[18]</sup>和腔振衰减光谱测量技术等<sup>[19]</sup>, 对高品质无源谐振腔的装调是实现这些高精度测量的保证. 在基于光学

无源腔的应用技术中, 无源腔常用的类型有两镜式直腔型和多腔镜式环形腔型, 直腔型由于具有结构简单等优势首先得到更多的青睐, 但是其结构简单的特点在降低谐振腔的制作难度的同时也给光谱系统带来了麻烦. 直腔存在着光反馈、标准具效应等<sup>[20]</sup>问题增加了器件的选择和安装难度. 而三角形环形腔具有以下优势<sup>[21]</sup>: 能在有限的腔体材料内实现较长的吸收路径, 这对于调谐式系统而言, 可减少腔纵模间隔, 从而提高系统光谱分辨率; 除输入、输出腔镜外, 折叠镜的加入方便了调谐式系统中腔长调节装置的安装; 激光选择从折叠镜入射到腔内时, 可防止光束直接被反射回激光器, 从而可节省光隔离器; 腔内不存在与腔镜高反膜平行的光学面, 可以忽略腔内标准具的影响; 相对于直腔, 环形腔较难激发高阶模式, 进而成为理想的适用于CRDS技术的谐振腔型<sup>[22]</sup>. 并且目前的研究多数根据结构较简单的两腔镜式谐振腔, 并没有广泛应用于更具有实用意义的环形谐振腔, 本文的分析对这一点进行了弥补.

感谢中国科学院长春光学精密机械与物理研究所空间一部激光光谱应用技术课题组的鞠国浩等各位同事在光学失配量确定方法方面的有益讨论, 感谢杨斌同学在光路结构求解上的启迪, 感谢苏志强同学在资料整理方面给予的帮助支持.

## 参考文献

- [1] Romanini D, Kachanov A A, Stoeckel E 1997 *Chem. Phys. Lett.* **270** 546
- [2] O' Keefe A, Deacon D A 1988 *Rev. Sci. Instrum.* **59** 2544
- [3] Chen Y, Yan W B 2007 *Proc. SPIE* **6756** 675607
- [4] Fallows E A, Cleary T G, Miller J H 2009 *Appl. Opt.* **48** 695
- [5] Rao G N, Karpf A 2010 *A Trace Gas Sensor at ppb Sensitivity Based on Multiple Line Integration Spectroscopy Techniques* (OSA: Conference on Lasers and Electro-Optics) paper JWA60
- [6] Klaassen T, de Jong J, van Exter M, Woerdman J P 2005 *Opt. Lett.* **30** 1959
- [7] Dong Y H, Ding Y G, Xiao L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5629 (in Chinese) [董玉和, 丁耀根, 肖刘 2005 物理学报 **54** 5629]
- [8] Yu X D, Long X W, Tang J X 2007 *Opt. Precision Eng.* **15** 1760 (in Chinese) [于旭东, 龙兴武, 汤建勋 2007 光学精密工程 **15** 1760]
- [9] Yi H Y 2006 *Chin. J. Lasers* **33** 399 (in Chinese) [易亨瑜 2006 中国激光 **33** 399]
- [10] Hauck R, Kortz H P, Weber H 1980 *Appl. Opt.* **19** 598
- [11] Guo J P, Li Y D, Liu J L 2004 *Laser Infrared* **34** 182 (in Chinese) [郭俊平, 李育德, 刘静伦 2004 激光与红外 **34** 182]
- [12] Al' tshuler G B, Isyanova E D, Karasev V B, Levit A L, Ovchinnikov V M, Sharlai S F 1977 *Sov. J. Quantum Electron.* **7** 857
- [13] Sheng S C 1994 *Opt. Lett.* **19** 683
- [14] Yuan J, Long X W, Zhang B, Wang F, Zhao H C 2007 *Appl. Opt.* **46** 6314
- [15] Yuan J, Chen M X, Li Y Y, Tan Z Q, Wang Z G 2013 *Opt. Express* **21** 2297
- [16] Korn G A, Korn T M 1967 *Mathematics Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill) p267
- [17] Tuan H T, Huang S L 2005 *J. Opt. Soc. Am. A* **22** 2476
- [18] Maisons G, Gorrotxategi Carbajo P, Carras M, Romanini D 2010 *Opt. Lett.* **35** 3607
- [19] Jérémie C, Ajmal Khan M, Daniele R 2010 *Opt. Express* **18** 4845
- [20] Tan Z Q, Long X W, Huang Y, Wu S Y 2008 *Chin. J. Lasers* **35** 1563 (in Chinese) [谭中奇, 龙兴武, 黄云, 吴素勇 2008 中国激光 **35** 1563]
- [21] Jun K, Quang-Viet N 2002 *Appl. Opt.* **41** 6360
- [22] Kachanov A, Richman B A 2009 *US Patent* 7 535 573 B2 [2009-05-19]

# Analysis of the positional accuracy of the self-conjugate ray in a misalignment multiple-mirror optical ring cavity\*

Cui Li-Hong<sup>1)2)</sup> Yan Chang-Xiang<sup>1)†</sup> Zhao Wei-Ning<sup>1)2)</sup> Zhang Xin-Jie<sup>1)</sup> Hu Chun-Hui<sup>1)</sup>

1) (*Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*)

2) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

( Received 28 April 2015; revised manuscript received 23 June 2015 )

## Abstract

In order to analyze the characteristic of the close optical axis (conjugate optical axis) and the existence condition of resonator composed of multiple reflective mirrors, the existence condition of conjugate optical axis of the multiple-resonator consisting of many flat mirrors is analyzed and derived from the angle of beam conversion coordinate transformation. The results show that a closed ray axis in resonator with odd number of mirrors can exist only if each mirror is suitably aligned, while a closed ray axis always exists in non-planar resonators with even number of mirrors, and the angle of the cavity conjugate axis direction changes due to the misalignment of different mirrors. Then from the point of view of the optical multi-pass matrix, the incidence direction of the self-conjugate ray of the resonator consisting of spherical mirrors is analyzed. A detailed analysis of conjugated axis of the resonator consisting of two flat mirrors and one spherical mirror is conducted, and the results show that when different mirrors have angle deviations, the closed conjugated optical axis remains in the cavity, the change of resonator axis occurs, and the position and orientation of new resonance surface are given, thereby indicating that in the case of resonator with spherical mirrors there is a self-conjugate ray irrespective of the other flat mirrors positions. All of these will provide theoretical guidance for achieving the high-accuracy alignment and improving the measurement accuracy of spectral measurement technology based on high-quality optical cavity.

**Keywords:** optical measurement, optic axis misalignment, mirror misalignment, position of self-conjugate ray of resonator

**PACS:** 42.55.Ah, 42.60.-v, 42.62.-b

**DOI:** 10.7498/aps.64.224210

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011AA12A103).

† Corresponding author. E-mail: [yan cx@ciomp.ac.cn](mailto:yan cx@ciomp.ac.cn)