

# 基于 Tetrolet 变换的图像稀疏逼近算法

彭 洲<sup>1</sup>, 唐林波<sup>1</sup>, 赵保军<sup>1</sup>, 周 刚<sup>2</sup>

(1. 北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081;  
2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

**摘 要:** 针对现有大部分图像稀疏逼近算法通用性不强, 仅对具有某类特征的图像具有最优逼近性能的问题, 利用小波变换与 Tetrolet 变换各自的优点, 提出了一种通用性强, 不受图像特征限制的图像稀疏逼近算法。该算法分别利用小波变换与 Tetrolet 变换对图像的平滑区域与细节区域进行稀疏逼近, 先提取平滑区域, 对平滑区域进行修正, 然后对修正后的平滑区域进行稀疏逼近。根据平滑区域稀疏逼近的结果分离出细节区域, 实现对细节区域的稀疏逼近。对一系列典型图像进行仿真的结果表明, 该算法通用性强, 不受图像特征的限制, 在同等条件下, 图像重构质量比传统小波变换高约 5.5 dB, 比 Tetrolet 变换高约 1.0 dB。

**关键词:** 图像稀疏逼近; 小波变换; Tetrolet 变换; 特征提取

中图分类号: TN 911.73

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2011.11.36

## Image sparse approximation based on Tetrolet transform

PENG Zhou<sup>1</sup>, TANG Lin-bo<sup>1</sup>, ZHAO Bao-jun<sup>1</sup>, ZHOU Gang<sup>2</sup>

(1. School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;  
2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** Since most of image sparse approximation algorithms are not universal, and these algorithms could achieve optimal approximation at the special image with certain detail, a new algorithm based on the advantages of wavelet and tetrolet transform is proposed. The new algorithm exploits the advantages of the wavelet transform for the representation of smooth images and the ability of the tetrolet transform to represent details. Firstly, the smooth region are extracted and amended, then the smooth region is sparsely represented. Finally, the detail region based on the representation of smooth images is extracted, and the sparse representation of the detail region is implemented. The results of experiment show that the new algorithm is universal and it does not depend on the image detail. The image construction in quality is better than the wavelet transform by about 5.5 dB and the Tetrolet transform by about 1.0 dB at the same conditions.

**Keywords:** image sparse approximation; wavelet transform; Tetrolet transform; texture extraction

## 0 引 言

稀疏逼近是图像处理中最基本、最核心的内容, 它是图像压缩、图像增强、图像特征提取、图像内容检索等图像处理技术的基础。稀疏逼近最简单的定义是尽可能用最少的系数去重建逼近原始图像。近年来, 继小波变换之后, 陆续有多种各具特色的新方法出现<sup>[1-9]</sup>, 小波变换能对平滑图像进行最优稀疏表示, 但是由于它不能有效处理含有线奇异的函数类, 所以在高维情况下它不能对含有大量几何特征的图像进行最优稀疏逼近, 陆续出现的新方法弥补了小波变换的此类不足。Curvelets 能最优逼近连续的闭曲线<sup>[10]</sup>。

Shearlets 在频域上是紧支撑的, 局部化特性非常好。Contourlets 继承了 Curvelets 的各向异性, 是一种多分辨率的、方向的、局域的逼近方法。Directionlets 能对交叉直线提供最优逼近。Wedgelets 提供了水平模型近于最优的逼近。Grouplets<sup>[11]</sup>有效减少了图像中所包含共同特征的冗余。Bandelets 具有高阶方向消失矩, 具有严格采样<sup>[12]</sup>, 可以获得无冗余的表示。最小路径小波变换 (easy path wavelet transform, EPWT)<sup>[13-14]</sup>充分利用像素间的相关性, 将二维变换简化为了一维变换。Tetrolet 变换<sup>[9, 15]</sup>是一种新的自适应 Haar 小波变换, 它兼顾了 Curvelets 等新方法的优点, 对多种几何特征都能最优逼近。以上每一种方法对于具有

收稿日期: 2011-05-24; 修回日期: 2011-07-20。

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划)(2009AA8012320B)资助课题

作者简介: 彭洲(1985-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为图像压缩与图像增强。E-mail: pengzhou85@163.com

特定特征的图像才具有最优逼近性能,适用性差,本文利用小波变换对平滑图像具有最优逼近性能和 Tetrolet 变换能兼顾多种几何特征最优逼近的特点,提出了一种适用性强的基于 Tetrolet 变换的图像稀疏逼近新方法。

### 1 Tetrolet 变换

文献[9]提出了一种新的自适应 Haar 小波变换——Tetrolet 变换,该变换的结构非常简单。Tetrolet 变换首先将图像分为若干个  $4 \times 4$  的块<sup>[9,16]</sup>,然后根据每个块的图像几何信息对块进行拼板划分,划分为 4 个区域,进而对每个区域进行离散 Haar 小波变换,从而达到稀疏逼近的目的。

Golomb 等人对图像的拼板划分进行过详细的讨论,任何一幅大小为  $N \times N$  的图像,只要  $N$  为偶数,那么该图像就能由 5 个基本拼板组合而成,如图 1 所示。对于  $4 \times 4$  的图像,有 117 种组合方案,对于  $8 \times 8$  的图像,有  $117^4$  种组合方案。要选取组合方案中最优的一种方案,需要对每一种方案进行评估,方案数越大,评估时所需的计算量就越大,在决定分块大小时,需要考虑分块大小对计算量大小的影响,当分块为  $4 \times 4$  时,有 117 种组合方案,为  $8 \times 8$  时,方案数呈几何倍数增长,  $117^4 \gg 117$ 。考虑分块大小与计算量大小之间的关系,选取  $4 \times 4$  的分块最合适。对于  $4 \times 4$  的分块,如果不考虑基本拼板的旋转和翻转,117 种组合方案可以简化为 22 种组合方案。

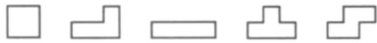


图 1 基本拼板

输入图像表示为  $a^0 = (a[i, j])_{i,j=0}^{N-1}$ , 其中,  $N = 2^J$ , ( $J \in \mathbb{N}$ ), 图像可以用一维索引来表示每个像素点, 表示为

$$J: I \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N^2 - 1\}, J((i, j)) := jN + i \quad (1)$$

可以对图像进行  $J$  级 Tetrolet 变换, 进行第  $r$  级 ( $r = 1, 2, \dots, J - 1$ ) 变换的步骤为<sup>[9]</sup>

步骤 1 将低通部分  $a^{r-1}$  分为若干个  $4 \times 4$  的块  $Q_{i,j}$ , ( $i, j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^{r+1}} - 1$ );

步骤 2 对于每一个块  $Q_{i,j}$ , 进行拼板划分, 有 117 种组合方案, 记为  $c = 1, 2, 3, \dots, 117$ 。进行拼板划分后的每个区域记为  $I_s^{(c)}$  ( $s = 0, 1, 2, 3$ )。每个区域有 4 个像素点, 按照每个像素点  $J((i, j))$  的大小, 由小到大, 每个点映射为索引  $L(m, n) = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $m, n \in I_s^{(c)}$ 。对  $I_s^{(c)}$  进行 Haar 小波变换, 能得到 4 个低通子带  $a^{r,(c)}$  和 12 个 Tetrolet 子带  $w_l^{r,(c)}$  ( $l = 1, 2, 3$ )。

$$a^{r,(c)} = (a^{r,(c)}[s])_{s=0}^3$$

式中

$$a^{r,(c)}[s] = \sum_{(m,n) \in I_s^{(c)}} \epsilon[0, L(m, n)] a^{r-1}[m, n] \quad (2)$$

$$w_l^{r,(c)} = (w_l^{r,(c)}[s])_{s=0}^3$$

式中

$$w_l^{r,(c)}[s] = \sum_{(m,n) \in I_s^{(c)}} \epsilon[l, L(m, n)] a^{r-1}[m, n] \quad (3)$$

$$W: = (\epsilon[l, m])_{l,m=0}^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

计算出每个方案的低通子带和 Tetrolet 子带后, 从中选出最优的方案, 选择准则为

$$c^* = \arg \min_c \sum_{l=1}^3 \sum_{s=0}^3 |w_l^{r,(c)}[s]| \quad (5)$$

选出最优方案后, 每个分块  $Q_{i,j}$  进行 Tetrolet 变换后的子带为

$$[a^{r,(c^*)}, w_1^{r,(c^*)}, w_2^{r,(c^*)}, w_3^{r,(c^*)}]$$

步骤 3 对子带  $a^{r,(c^*)}$  和  $w_l^{r,(c^*)}$  进行重排, 重排为  $2 \times 2$  的矩阵, 为下一级变换做好准备。

$$a_{l|Q_{i,j}}^r = \mathbf{R}(a^{r,(c^*)}) = \begin{bmatrix} a^{r,(c^*)}[0] & a^{r,(c^*)}[2] \\ a^{r,(c^*)}[1] & a^{r,(c^*)}[3] \end{bmatrix} \quad (6)$$

同样,  $w_{l|Q_{i,j}}^r = \mathbf{R}(w_l^{r,(c^*)})$ 。

步骤 4 存储低通子带矩阵  $a^r = (a_{l|Q_{i,j}}^r)_{i,j=0}^{\frac{N}{2^{r+1}}-1}$  和 Tetrolet 子带矩阵  $w_l^r = (w_{l|Q_{i,j}}^r)_{i,j=0}^{\frac{N}{2^{r+1}}-1}$ , 用  $a^r$  与  $w_l^r$  构成  $a^{r-1}$

$$a^{r-1} = \begin{bmatrix} a^r & w_2^r \\ w_1^r & w_3^r \end{bmatrix} \quad (7)$$

按照以上步骤, 可以对图像进行最多  $J$  级 Tetrolet 变换。

### 2 算法实现

将图像  $a^0$  分为光滑区域  $a^s$  与细节区域  $a^d$ , 即  $a^0 = a^s + a^d$ 。小波变换对光滑图像具有最优的稀疏逼近, 但是对细节部分中的边缘和纹理信息却不能达到最优的稀疏逼近, Tetrolet 变换正好弥补了这一缺点, Tetrolet 变换对边缘和纹理信息的稀疏逼近性能远远高于小波变换。对光滑部分  $a^s$  进行小波变换稀疏逼近, 对细节部分  $a^d$  进行 Tetrolet 变换稀疏逼近, 能达到对整体图像进行最优稀疏逼近的效果, 算法结构图见图 2, 算法步骤为

步骤 1 对图像  $a^0$  进行模糊化处理, 得到光滑区域  $a^s$ 。

$$a_{k+1}(i, j) = \text{Smooth}(a^0, k, \lambda) = a_k(i, j) + \lambda(a_k(i+1, j) + a_k(i-1, j) + a_k(i, j-1) + a_k(i, j+1) - 4a_k(i, j)) \quad (8)$$

$$a^s = a_{k+1}(i, j) \quad (9)$$

式中,  $k$  为 Smooth 函数循环的次数;  $\lambda$  为平滑因子, 控制图像的平滑程度。

步骤 2 利用光滑区域  $a^s$  求得细节区域  $a^d$ , 细节部分中含有大量的灰度值极小的像素点, 对  $a^d$  进行硬阈值处理, 得到处理后的细节区域  $\hat{a}^d$ , 然后利用  $a^0$  与  $\hat{a}^d$  对  $a^s$  进行修正, 可以得到比  $a^s$  多一些边缘和纹理信息的  $\hat{a}^s$ 。

$$\hat{a}^d = a^0 - a^s \quad (10)$$

$$\hat{a}^d = T(a^d, \mu) = \begin{cases} a^d, & a^d \geq \mu \\ 0, & a^d < \mu \end{cases} \quad (11)$$

$$\hat{a}^s = a^0 - \hat{a}^d \quad (12)$$

步骤 3 对  $\hat{a}^s$  进行双正交小波变换,这里选取 9/7 双正交小波变换,变换后,保留  $M$  个重要系数,其他系数全部置 0,并用这  $M$  个重要系数重建光滑部分,得到  $\hat{a}_M^s$ 。

步骤 4 由  $\hat{a}_M^s$  重新计算细节区域,并对细节部分进行硬阈值处理。

$$a^r = a^0 - \hat{a}_M^s \quad (13)$$

$$\hat{a}^r = T(a^r, \hat{\mu}) \quad (14)$$

步骤 5 对  $\hat{a}^r$  进行 Tetrolet 变换,从得到的变换系数中,保留  $N$  个重要的系数,并用这  $N$  个重要系数重建细节部分  $\hat{a}_N^r$ 。

经过以上 5 个步骤,将可以用  $M+N$  个系数对图像  $a^0$  进行稀疏逼近,稀疏逼近后的图像  $\hat{a}^0 = \hat{a}_M^s + \hat{a}_N^r$ 。

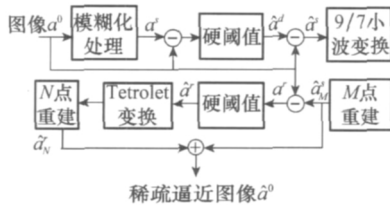


图 2 算法结构图

### 3 实验分析

为了验证算法的性能,选取 6 幅分辨率为  $512 \times 512$  的典型图像(有 262 144 个像素点)作为实验对象,在 Matlab 中对本文算法进行仿真,为了便于算法性能的比较,同时对 9/7 小波以及 Tetrolet 变换也进行仿真,分别进行 5 级 9/7 小波变换和 3 级 Tetrolet 变换。

采用峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)作为图像稀疏逼近性能的衡量指标,PSNR 值越大证明重构图像的质量越高,算法的稀疏逼近性能越好,PSNR 定义为

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{255^2}{\text{MSE}} \quad (15)$$

式中,MSE 为分辨率为  $M \times N$  原始图像  $x_{ij}$  与重构图像  $y_{ij}$  之间的均方误差(mean square error, MSE),其定义为

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{ij} - y_{ij})^2 \quad (16)$$

进行 4 类实验,分别验证步骤 2 和步骤 4 中  $\hat{a}^s, \hat{a}^r$  保留系数个数对稀疏逼近的影响,以及步骤 3 和步骤 5 中  $\hat{a}^s, \hat{a}^r$  保留系数个数对稀疏逼近的影响。

实验 1 步骤 1 中,平滑因子  $\lambda$  取 0.15,循环次数  $k$  为 6。步骤 2 以及步骤 4 中阈值门限  $\mu$  与  $\hat{\mu}$  的选取,以使  $\hat{a}^s$  与  $\hat{a}^r$  保留 65 536 个非零系数为原则。步骤 3 中,对  $\hat{a}^s$  进行 5 级 9/7 小波变换,保留  $M=1 200$  个非零系数。步骤 5 中,对  $\hat{a}^r$  进行 3 级 Tetrolet 变换,保留  $N=800$  个非零系数。

实验 2 与实验 1 相比, $M$  取 4 800, $N$  取 3 200,其他参数不变。

实验 3 与实验 1 相比,仅步骤 2 以及步骤 4 中阈值门限  $\mu$  与  $\hat{\mu}$  的选取不同,实验 3 以保留 131 072 个非零系数为原则,其他参数不变。

实验 4 与实验 2 相比,仅步骤 2 以及步骤 4 中阈值门限  $\mu$  与  $\hat{\mu}$  的选取不同,实验 4 以保留 131 072 个非零系数为原则,其他参数不变。

仿真结果比较见表 1,其中本文 1 是实验 1 与实验 2 的结果,本文 2 是实验 3 和实验 4 的结果, $n$  为非零点的个数。从仿真结果可以看出,本文算法的性能要远远优于 9/7 小波变换,重建效果要比 9/7 小波变换高约 5.5 dB,比 Tetrolet 变换高 1.0 dB 左右。本文 1 和本文 2 相比,最主要的不同是在取阈值门限  $\mu$  与  $\hat{\mu}$  时,保留的非零点个数不同,一个为 65 536,另一个为 131 072,在进行 9/7 变换以及 Tetrolet 变换之前,保留的系数越多,则最后逼近的效果越好,本文 2 的效果比本文 1 约高 0.6 dB。部分仿真结果图如图 3~图 5( $n=2 000$ ) 所示。

表 1 仿真结果比较

图像	$n$	9/7	Tetrolet	本文 1	本文 2
Barbara	2 000	22.15	26.62	27.25	27.46
Goldhill	2 000	23.47	26.83	27.67	28.05
Cat	2 000	22.21	27.42	28.13	28.62
Fish	2 000	22.64	27.95	28.52	28.63
F-16	2 000	23.19	27.15	27.66	28.59
Lena	2 000	22.96	25.27	26.32	27.41
Barbara	8 000	25.51	28.33	30.24	30.84
Goldhill	8 000	27.35	29.86	31.03	31.25
Cat	8 000	26.04	30.27	32.36	32.67
Fish	8 000	25.85	29.72	31.67	32.97
F-16	8 000	28.32	29.68	30.32	31.42
Lena	8 000	26.28	28.42	29.59	30.64



图 3 Barbara 仿真结果图



图 4 Goldhill 仿真结果图



图 5 Cat 仿真结果图

#### 4 结束语

现有大部分图像稀疏逼近算法,不具备通用性,仅对具有特定特征的图像才具有最优逼近性能,本文提出的算法,吸收了小波变换对平滑图像具有最优逼近性能与 Tetrolet 变换对多种几何特征具有最优逼近性能的优点,对图像的平滑区域用小波变换进行稀疏逼近,对细节区域用 Tetrolet 变换进行稀疏逼近,以达到对图像平滑区域与细节区域最优的稀疏逼近。在算法验证阶段,对本文算法以及小波变

换, Tetrolet 变换进行了仿真。结果表明,本文算法具有较强的通用性,性能比传统小波变换高约 5.5 dB,比 Tetrolet 变换高约 1.0 dB。图像稀疏逼近是图像压缩等一系列图像处理技术的基础,将本文稀疏逼近算法应用于图像压缩等领域是下一步研究的重点。

#### 参考文献:

- [1] Candes E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise  $C^2$  singularities[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(2):219-266.
- [2] Guo K, Labate D. Optimally sparse multidimensional representation using shearlets [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2007, 39(1):298-318.
- [3] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, 14(12):2091-2106.
- [4] Velisavljevic V, Beferull-Lozano B, Vetterli M, et al. Directionlets: anisotropic multidirectional representation with separable filtering[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, 15(7):1916-1933.
- [5] Donoho D L. Wedgelets; nearly minimax estimation of edges[J]. *Annals of Statistics*, 1999, 27(3):859-897.
- [6] Mallat S. Geometrical grouplets[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(2):161-180.
- [7] Le Pennec E, Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, 14(4):423-438.
- [8] Plonka G. The easy path wavelet transform: a new adaptive wavelet transform for sparse representation of two-dimensional data [J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2009, 7(3):1474-1496.
- [9] Krommweh J. Tetrolet transform: a new adaptive Haar wavelet algorithm for sparse image representation[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2010, 21(4):364-374.
- [10] Ma J W, Plonka G. The curvelet transform[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(2):118-133.
- [11] Peyre G. Texture synthesis with grouplets[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, 32(4):733-746.
- [12] Peyre G, Mallat S. Surface compression with geometric bandelets[J]. *ACM Trans. on Graphics*, 2005, 24(3):601-608.
- [13] Plonka G, Rosca D. Easy path wavelet transform on triangulations of the sphere[J]. *Mathematical Geosciences*, 2010, 42(7):839-855.
- [14] Ma J W, Plonka G, Chauris H. A new sparse representation of seismic data using adaptive easy-path wavelet transform[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2010, 7(3):540-544.
- [15] Krommweh J, Ma J W. Tetrolet shrinkage with anisotropic total variation minimization for image approximation[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(8):2529-2539.
- [16] Breukelaar R, Demaine E D, Hohenberger S, et al. Tetris is hard, even to approximate[J]. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2004, 14(1-2):41-68.