基于指数积公式的导引头运动学分析与标定

朱明超[1],王 涛[1,2],贾宏光[1]

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所,吉林 长春 130033;
2. 中国科学院研究生院,北京 100049)

摘 要:针对半捷联俯仰偏航双框架导引头的结构特点,分析了框架的运动学描述方法。利用角速度递归算式,将弹体的惯性空间速度映射到视轴坐标系,推导出视轴的惯性空间稳定方程。基于指数积公式,给出了框架的运动学标定模型,研究了运动学方程的标定方法。将误差参数归结于框架坐标系的初始姿态,简化了运动学参数的标定过程。采用迭代最小二乘算法求解标定模型中的运动学误差参数。数值仿真结果表明:提出的运动学标定方法有效提高了视轴惯性空间稳定方程的求解精度。

关键词:半捷联导引头; 视轴稳定; 指数积公式; 运动学标定

中图分类号:TP273 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-2276(2011)08-1556-07

Seeker kinematic analysis and calibration based on POE formula

Zhu Mingchao[1], Wang Tao[1,2], Jia Hongguang[1]

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: According to the structure feature of the pitch-yaw strapdown seeker, a representation of the seeker gimbal kinematics was analysed. By transforming the inertial angular velocity into the line-of-sight (LOS) coordinate system with the aid of recursive angular velocity equations, the LOS inertial space stabilization equation was obtained. Based on the product-of-exponentials (POE) formula, a kinematic calibration model was presented for the gimbal and the kinematic calibration scheme was studied. By attributing the kinematic errors to the initial poses, the calibration process of kinematic parameters was significantly simplified. A least-squares algorithm was employed to solve the kinematic error parameters in calibration model iteratively. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed kinematic calibration scheme in solving inertial space stabilization equation.

Key words: strapdown seeker; LOS stabilization; POE formula; kinematic calibration

---

收稿日期:2010-12-17; **修订日期**:2011-01-03

基金项目:中国科学院"三期创新"平台

作者简介:朱明超(1980-),男,助理研究员,博士,主要从事导引头运动学、动力学与控制方面的研究工作。
Email:zhumingchao1980@yahoo.com.cn

0 引 言

导引头是现代精确制导战术导弹的重要组成部分，其功能是完成对目标的自主搜索、识别、跟踪与测量。在末制导阶段，其性能的好坏直接影响脱靶量和目标打击概率[1]。由于导引头安装在弹体前端，视线的稳定与跟踪在一定程度上受弹体运动的影响。为了实现可靠、高精度的目标跟踪，必须采用稳定平台来隔离弹体运动[2]。传统的稳定方式采用速率陀螺稳定平台，该平台的惯性传感器位于框架轴上，利用速率陀螺测量视轴在俯仰和偏航方向的惯性空间角速度，并直接将其反馈至速度环路控制器，控制导引头反向偏转以实现视线在惯性空间的稳定指向[3]。现代战争的发展对武器系统提出了更高的要求：除了能精确打击并摧毁目标外，还要求其体积小、质量轻、成本低。

近年来，半捷联稳定方式得到了极大的发展[4-5]。半捷联稳定方式采用与弹体捷联的惯性器件测量弹体的角速度信息，并通过坐标变换将其映射到视轴坐标系，从而得出使视轴在惯性空间稳定所需的框架角速度指令，以控制伺服系统抵消弹体扰动对视轴的影响[6]。导引头的运动学分析通常采用旋转矩阵描述方法[7]，得到的视轴惯性稳定方程形式复杂，不利于算法的理论分析和实时执行。另外，由于加工和装配误差的影响，框架的实际运动学参数将偏离其标称参数。由标称参数计算得到的框架角速度指令不能保证视轴在惯性空间的稳定指向。为改善半捷联稳定精度，需要对框架运动学参数进行标定[8-9]。

文中采用指数积方法[10]分析了导引头框架的运动学关系，给出了矩阵形式的视轴惯性稳定方程。通过对运动学方程的线性化得到运动学标定模型，采用迭代最小二乘算法对运动学误差参数进行求解。仿真结果表明：提出的标定算法有较高的精度，采用标定后的运动学参数，可以有效提高视轴稳定方程的求解精度。

1 框架运动学分析

半捷联导引头光学系统稳定平台安装于弹体头部，平台基座与弹体刚性连接。稳定平台采用俯仰-偏航两自由度万向支架结构，可以绕俯仰和偏航轴运动，以实现对目标的跟踪与捕获。惯性测量单元与弹体捷联用于测量弹体的角速度信息。光学系统和图像处理器用于测量跟踪目标过程中产生的失调角。旋转变压器用于测量稳定平台相对于弹体的俯仰、偏航角位置及角速度。数字信号处理器利用弹体角速度和稳定平台的相对角位置信息解算速度环的前馈补偿指令，驱动电机绕俯仰、偏航轴偏转，从而实现视轴稳定。系统原理如图 1 所示。

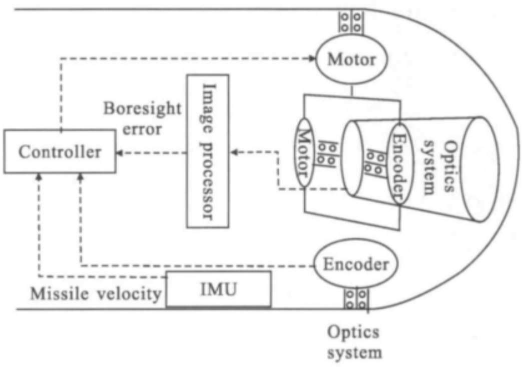

图 1 导引头结构框图

Fig.1 Block diagram for seeker

导引头的运动学关系可以考虑为由俯仰轴和偏航轴组成的开运动学链。

在俯仰、偏航轴线的相交点建立如图 2 所示的 3 个坐标系。其中，$o-x_0y_0z_0$ 为弹体坐标系；$o-x_1y_1z_1$为偏航坐标系，与偏航框固联，oy_1 轴与偏航轴重合；$o-x_2y_2z_2$ 为俯仰坐标系(视轴坐标系)，与俯

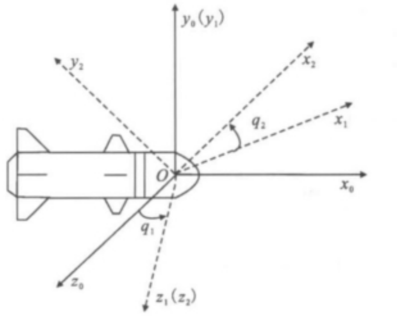

图 2 框架坐标系

Fig.2 Coordinate system for gimbal

仰框固联，oz_2 轴与俯仰轴重合，ox_2 轴与视轴重合。如果框架的旋转角为 $\boldsymbol{q}=[q_1,q_2]^{\mathrm{T}}$($q_1$ 和 q_2 分别为偏航角和俯仰角)，则偏航坐标系相对于弹体坐标系的姿态可以描述为：

$$\boldsymbol{R}_{0,1}(q_1)=\boldsymbol{R}_{0,1}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_1 q_1} \tag{1}$$

俯仰坐标系相对于偏航坐标系的姿态可以描述为：

$$\boldsymbol{R}_{1,2}(q_2)=\boldsymbol{R}_{1,2}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_2 q_2} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{R}_{0,1}(0)\in SO(3)$（特殊正交群）表示偏航角在初始位置($q_1$=0)时偏航坐标系相对于弹体坐标系的姿态；$\boldsymbol{R}_{1,2}(0)\in SO(3)$表示俯仰角在初始位置时($q_2$=0)俯仰坐标系相对于偏航坐标系的姿态；$\hat{\boldsymbol{w}}_i\in so(3)$ (i=1,2)为 $SO(3)$的李代数，定义为：

$$\hat{\boldsymbol{w}}_i=\begin{bmatrix}0 & -w_{iz} & w_{iy}\\ w_{iz} & 0 & -w_{ix}\\ -w_{iy} & w_{ix} & 0\end{bmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{w}_i=[w_{ix}, w_{iy}, w_{iz}]^{\mathrm{T}}$ 为描述在坐标系 o 的旋转轴线单位矢量。

由公式(1)和(2)可得俯仰坐标系相对于弹体坐标系的姿态，即正运动学方程

$$\boldsymbol{R}_{0,2}(q)=\boldsymbol{R}_{0,1}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_1 q_1}\boldsymbol{R}_{1,2}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_2 q_2} \tag{4}$$

逆运动学是正运动学的反过程，即由已知的末端坐标系姿态求解框架偏转角。设 $\boldsymbol{R}_{0,2}$ 为公式(4)描述的运动学方程，$\boldsymbol{R}_{0,2}$ 的微分可以描述为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{R}_{0,2}}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{R}_{0,2}}{\partial q_i}&=\boldsymbol{R}_{0,i-1}\frac{\partial(\boldsymbol{R}_{i-1,i}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_i q_i})}{\partial q_i}\boldsymbol{R}_{i,2}=\\ &\boldsymbol{R}_{0,i-1}\boldsymbol{R}_{i-1,i}(0)\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{w}}_i q_i}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}=\\ &\boldsymbol{R}_{0,i}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}\end{aligned} \tag{6}$$

由公式(5)和(6)可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{0,i}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}\mathrm{d}q_i \tag{7}$$

公式(7)左边乘以 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}$ 可得：

$$\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{i,2}^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}\mathrm{d}q_i \tag{8}$$

设 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}$ 为视轴坐标系相对弹体坐标系的期望姿态，则 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}$ 和 $\boldsymbol{R}_{0,2}$ 有如下关系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}-\boldsymbol{R}_{0,2} \tag{9}$$

将公式(8)左端写为：

$$\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}-\boldsymbol{I} \tag{10}$$

由矩阵对数运算规则有

$$\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d})=(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}-\boldsymbol{I})-\frac{(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}-\boldsymbol{I})^2}{2}+\frac{(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d}-\boldsymbol{I})^3}{3}-\cdots \tag{11}$$

忽略高次项可得：

$$\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}=\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}) \tag{12}$$

将公式(12)代入公式(8)可得：

$$\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d})=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{i,2}^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}\mathrm{d}q_i \tag{13}$$

因为对数映射是指数映射的逆映射，所以 $\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d})$ 是 $so(3)$的一个元素，可以表示为 3×1 向量 $\log(\boldsymbol{R}_{02}^{-1}\boldsymbol{R}_{02}^{d})^{\vee}$，$\boldsymbol{R}_{i,2}^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}_i\boldsymbol{R}_{i,2}$ 可以表示为 3×1 向量 $\boldsymbol{R}_{i,2}^{-1}\boldsymbol{w}_i$，由公式(13)可得

$$\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d})^{\vee}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{i,2}^{-1}\boldsymbol{w}_i\mathrm{d}q_i=\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{0,i}\boldsymbol{w}_i\mathrm{d}q_i \tag{14}$$

将公式(14)改写为：

$$\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q})\mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{q})=\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\boldsymbol{R}_{0,2}^{d})^{\vee}\in R^{3\times1}$ 为姿态微分向量；$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{PVW}\in R^{3\times2}$ 为框架的 Jacobian 矩阵，其中，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}\in R^{3\times3}$，$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{R}_{0,1},\boldsymbol{R}_{0,2}]\in R^{3\times6}$，$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{w}_2\end{bmatrix}\in R^{6\times2}$；$\mathrm{d}\boldsymbol{q}=[\mathrm{d}q_1,\mathrm{d}q_2]^{\mathrm{T}}\in R^{2\times1}$。

由公式(15)可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q})^{+}\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{q}) \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{J}_n^{+}=(\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n)^{-1}\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{J}_n$ 的伪逆矩阵。

将公式(16)改写为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{t+1}=\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q}_t)^{+}\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{q}_t) \tag{17}$$

式中：t 为迭代次数。

框架角的更新律满足

$$\boldsymbol{q}_{t+1}=\boldsymbol{q}_t+\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{t+1} \tag{18}$$

当$\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}_t)\|\leqslant\varepsilon$ 时，逆运动学算法停止迭代，ε 是算法容许误差。

当框架处于奇异形位，即矩阵 $\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n$ 奇异时，迭代逆运动学算法将不能正常运行。为保证算法能顺利通过奇异形位，将 $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q}_t)^{+}$改写为：

$$J_n(q_i)^+=(J_n^{\mathrm{T}}J_n+\lambda I)^{-1}J_n^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

式中：λ 可选择为一小常数，或根据框架的可操作度自适应变化。

2 视轴稳定方程

令弹体扰动角速度为 $\omega_0 \in R^{3\times1}$，则偏航和俯仰坐标系的角速度分别为：

$$\omega_1=R_{0,1}^{-1}(q_1)\omega_0+w_1\dot{q}_1 \tag{20}$$

$$\omega_2=R_{1,2}^{-1}(q_2)\omega_1+w_2\dot{q}_2 \tag{21}$$

综合公式(20)和(21)可得俯仰坐标系(视轴坐标系)在惯性空间的角速度为：

$$\omega_2=R_{0,2}^{-1}(q)\omega_0+R_{1,2}^{-1}(q_2)w_1\dot{q}_1+w_2\dot{q}_2 \tag{22}$$

视轴指向稳定时应满足 $\omega_2=0$，由公式(22)可得：

$$J_s\dot{q}=D_s \tag{23}$$

式中：$J_s=[R_{1,2}^{-1}(q_2)w_1,w_2]$；$\dot{q}=[\dot{q}_1,\dot{q}_2]^{\mathrm{T}}$；$D_s=-R_{0,2}^{-1}(q)\omega_0$。

由公式(23)可得使视轴惯性空间稳定所需的框架角速度：

$$\dot{q}=J_s^+D_s \tag{24}$$

公式(23)中，J_s 的秩为2，求解公式(24)时会出现数值问题，说明采用两自由度框架不可能实现视轴坐标系的三自由度稳定，这是两自由度稳定平台存在的固有问题。考虑到采用滚转控制后弹体的滚转角速度通常会很小，基本不会改变视轴的指向，因此只考虑导引头的两自由度稳定即可。不考虑视轴的滚转稳定，将 ω_2、J_s 和 D_s 分解为：

$$\omega_2=\begin{bmatrix}\omega_{21}\\ \omega_{22}\end{bmatrix} \tag{25}$$

$$J_s=\begin{bmatrix}J_{s1}\\ J_{s2}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$D_s=\begin{bmatrix}D_{s1}\\ D_{s2}\end{bmatrix} \tag{27}$$

式中：$\omega_{21}\in R$，$\omega_{22}\in R^{2\times1}$；$J_{s1}\in R^{1\times2}$，$J_{s2}\in R^{2\times2}$；$D_{s1}\in R^{1\times1}$，$D_{s2}\in R^{2\times1}$。

由公式(22)可得：

$$\omega_{22}=J_{s2}\dot{q}-D_{s2} \tag{28}$$

令 ω_{22} 为零，视轴稳定方程重写为：

$$J_{s2}\dot{q}=D_{s2} \tag{29}$$

由公式(29)可得使视轴稳定的框架角速度指令为：

$$\dot{q}=J_{s2}^{-1}D_{s2} \tag{30}$$

在工程实现中，通常忽略俯仰和偏航框架的交叉耦合，而将两框架设计为独立的伺服系统。俯仰和偏航框架的速度环结构如图 3 所示[2]。图中，$G_v(s)$ 为速度环控制器，T_d 为扰动力矩，T 为电机驱动力矩，J 为框架转动惯量，ω_p 为框架角速度，ω_m 为弹体扰动速度，$\omega_p-\omega_m$ 为框架相对速度。

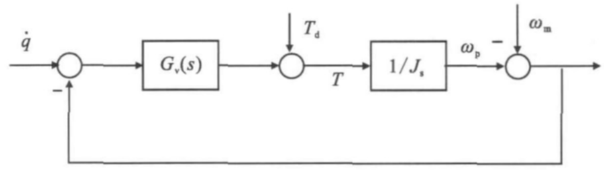

图 3 速度环结构框图
Fig.3 Block diagram for velocity loop

3 运动学标定

将框架的运动学方程描述为相关运动学参数的线性化形式，可以得到运动学标定模型。考虑运动学方程(公式(4))，视轴坐标系的末端姿态 $R_{0,2}$ 为 $R(0)$，w 和 q 的函数：

$$R_{0,2}=f(R(0),w,q) \tag{31}$$

式中：$R(0)=[R_{0,1}^{\mathrm{T}}(0),R_{1,2}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}$；$w=[w_1^{\mathrm{T}},w_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$；$q=[q_1,q_2]^{\mathrm{T}}$。

线性化公式(31)可得运动学标定模型：

$$\mathrm{d}R_{0,2}R_{0,2}^{-1}=(\frac{\partial f}{\partial R(0)}\mathrm{d}R(0)+\frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{d}w+\frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{d}q)R_{0,2}^{-1} \tag{32}$$

运动学标定的目标是基于视轴坐标系的实测姿态辨识最优运动学参数误差 $\mathrm{d}R(0)$，$\mathrm{d}w$ 和 $\mathrm{d}q$。计算运动学标定模型(公式(32))，需要对 14 个运动学参数进行辨识，极大地增加了解的冗余性和算法的复杂度。此外，直接对 $\mathrm{d}w$ 进行辨识非常困难且有可能出现数值问题。为了简化标定过程，仅对 $\mathrm{d}R(0)$进行辨识，$\mathrm{d}w$ 和 $\mathrm{d}q$ 仍采用标称值，标定模型简化为：

$$\mathrm{d}R_{0,2}R_{0,2}^{-1}=\frac{\partial f}{\partial R(0)}\mathrm{d}R(0)R_{0,2}^{-1} \tag{33}$$

由 $so(3)$到 $SO(3)$的指数映射关系可知，对于任意初始姿态 $R(0)\in SO(3)$一定存在$\hat{p}\in so(3)$，满足 $R(0)=\mathrm{e}^{\hat{p}}$。设 $R_{i-1,i}(0)=e^{\hat{p}_i}$，公式(4)可以重写为：

$$\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})=e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}e^{\hat{w}_2 q_2} \tag{34}$$

对其求微分可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})=\mathrm{d}e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}e^{\hat{w}_2 q_2}+e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}\mathrm{d}e^{\hat{p}_2}e^{\hat{w}_2 q_2} \tag{35}$$

由矩阵指数运算规则可得：

$$\mathrm{d}e^{\hat{p}_i}=e^{\hat{p}_i}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_i \tag{36}$$

将公式(36)代入公式(35)中可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})e^{\hat{p}_1}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_1 e_1^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}e^{\hat{w}_2 q_2}+e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_2 e^{\hat{w}_2 q_2} \tag{37}$$

将公式(37)右边乘以 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}(\boldsymbol{q})$ 可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{R}^{-1}{}_{0,2}(\boldsymbol{q})=e^{\hat{p}_1}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_1 e^{-\hat{p}_1}+e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_2 e^{-\hat{p}_2}e^{-\hat{w}_1 q_1}e^{-\hat{p}_1} \tag{38}$$

由 $(e^{-\hat{p}_1}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_1 e^{-\hat{p}_1})^{\vee}=e^{\hat{p}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$ 可得：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}(\boldsymbol{q}))^{\vee}=e^{\hat{p}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1+e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{39}$$

由公式(11)可得：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}(\boldsymbol{q}))^{\vee}=\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{a}\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1})^{\vee} \tag{40}$$

公式(39)可写为：

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{n} \tag{41}$$

式中：$\boldsymbol{m}=\log(\boldsymbol{R}_{0,2}^{a}\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1})^{\vee}\in R^{3\times1}$；$\boldsymbol{H}=[e^{\hat{p}_1}, e^{\hat{p}_1}e^{\hat{w}_1 q_1}e^{\hat{p}_2}]\in R^{3\times6}$；$\boldsymbol{n}=[\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^{6\times1}$。其中，$\boldsymbol{R}_{0,2}^{a}$ 为实测姿态，$\boldsymbol{R}_{0,2}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可通过标称模型计算得到，$\boldsymbol{n}$ 为反应运动学误差的辨识参数。

导引头运动学误差参数的辨识过程需要对视轴坐标系的实测姿态和标称姿态进行比较。实测姿态的工作点数量仅仅是框架工作空间的一个子集，为了更精确地反应出辨识参数对框架运动学特性的影响，应尽可能增加实测工作点。假设有 k 个实验点，则有：

$$\overline{\boldsymbol{m}}=\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{n} \tag{42}$$

式中：$\overline{\boldsymbol{m}}=[\boldsymbol{m}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{m}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{m}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^{3k\times1}$；$\overline{\boldsymbol{H}}=[\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^{3k\times6}$；$\boldsymbol{n}=[\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^{6\times1}$。

由公式(42)可得：

$$\boldsymbol{n}=\overline{\boldsymbol{H}}^{+}\overline{\boldsymbol{m}} \tag{43}$$

式中：$\overline{\boldsymbol{H}}^{+}=(\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}$。

当 $\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}$ 奇异时，$\overline{\boldsymbol{H}}^{+}$ 无解。此时，可采用与公式(19)类似的方法近似求解。

为了改善公式(43)的求解精度，可以采用迭代最小二乘算法，流程如下：

(1) 设置算法终止条件；

(2) 初始化 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$；

(3) 计算 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{H}}$；

(4) 计算 $\boldsymbol{n}$($\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$)；

(5) 更新 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$($\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$)；

(6) 计算终止条件，满足退出，否则转(3)。

经过数次迭代以后，$\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 将趋于稳定。由公式(34)可得标定后的框架运动学方程。

4 数值仿真

为验证算法的有效性，对图 2 所示框架的运动学关系进行数值仿真。由图 2 建立的坐标系可知，运动学标称参数为：

$\boldsymbol{w}_1=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{w}_2=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{p}_1=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{p}_2=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$

假设误差参数为：

$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1=[0.02, 0.03, 0.02]^{\mathrm{T}}$ $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2=[0.02, 0.04, 0.17]^{\mathrm{T}}$

视轴坐标系的实测姿态可以由公式(34)计算得到。随机计算 10 组可测姿态，对公式(43)进行 50 次迭代运算，标定结果为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1=[0.020\,3, 0.004\,4, 0.019\,7]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2=[0.020\,1, 0.065\,6, 0.009\,7]^{\mathrm{T}}$$

随机选取一组框架角 $\boldsymbol{q}=[1.0532, 27.0841]^{\mathrm{T}}$，分别利用运动学参数的标称值、实际值和标定值计算视轴坐标系的姿态 $\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})$、$\boldsymbol{R}_{0,2}^{a}(\boldsymbol{q})$ 和 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{c}(\boldsymbol{q})$，可得

$$\boldsymbol{R}_{0,2}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0.890\,2 & -0.455\,2 & 0.018\,4\\ 0.455\,3 & 0.890\,4 & 0\\ -0.016\,4 & 0.008\,4 & 0.999\,8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{0,2}^{a}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0.873\,6 & -0.478\,5 & 0.088\,9\\ 0.483\,0 & 0.874\,8 & -0.038\,3\\ -0.059\,5 & 0.076\,4 & 0.995\,3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{0,2}^{c}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0.873\,6 & -0.478\,5 & 0.088\,9\\ 0.483\,0 & 0.874\,8 & -0.038\,3\\ -0.059\,5 & 0.076\,4 & 0.995\,3\end{bmatrix}$$

由计算结果可知，标定后的视轴坐标系姿态与实测姿态一致，标定算法的计算精度较高。

由公式(30)可知，求解框架角速度指令需计算 $\boldsymbol{J}_{s2}$ 和 $\boldsymbol{D}_{s2}$，$\boldsymbol{J}_{s2}$ 和 $\boldsymbol{D}_{s2}$ 是运动学参数的函数。因此，运动

学标定可以提高视轴稳定方程的求解精度。假设框架角为 $\boldsymbol{q}=[1.0532, 27.0841]^{\mathrm{T}}$，弹体运动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0=[\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}]^{\mathrm{T}}$，其中，$\omega_{0x}=0.573\sin(3t)$，$\omega_{0y}=1.1459\sin(2t)$，$\omega_{0z}=1.7189\sin(4t)$。采用标称运动学参数和标定后的运动学参数计算使视轴惯性空间稳定所需的框架角速度，计算结果分别如图 4(a)和图 4(b)所示。

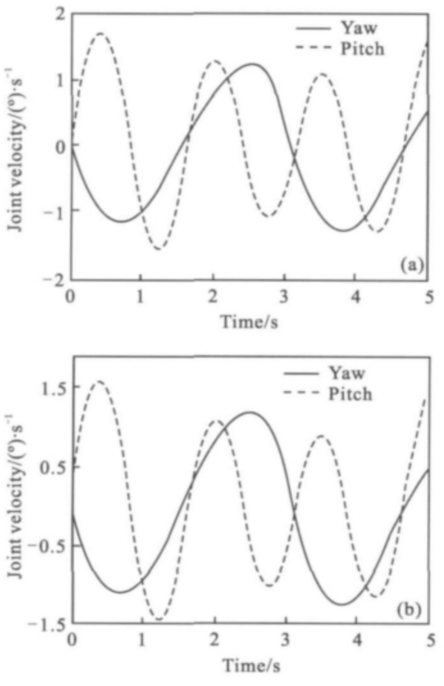

图 4 框架角速度

Fig.4 Angular velocity for gimbal

将图 4 的计算结果代入公式(22)，式中的 $\boldsymbol{R}_{0,2}^{-1}(\boldsymbol{q})$ 和 $\boldsymbol{R}_{1,2}^{-1}(\boldsymbol{q})$ 取实际运动学参数，采运标称运动学参数和标定后的运动学参数计算得到的视轴坐标系惯性空间角速度分别如图 5(a)和图 5(b)所示。

仿真结果表明，二自由度半捷联稳定方式可以保证视轴坐标系的两轴稳定。由于运动学参数存在误差，由公式(30)求解得到的框架角速度指令为：

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\bar{\boldsymbol{J}}_{s2}^{-1}\bar{\boldsymbol{D}}_{s2} \tag{44}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{J}}_{s2}$ 和 $\bar{\boldsymbol{D}}_{s2}$ 分别为 J_{s2} 和 D_{s2} 的标称值，存在计算误差。

将公式(43)代入公式(28)可知，由标称参数计算得到的角速度指令所产生的视轴速度为：

$$\boldsymbol{\omega}_{22}=\boldsymbol{J}_{s2}\bar{\boldsymbol{J}}_{s2}^{-1}\bar{\boldsymbol{D}}_{s2}-\boldsymbol{D}_{s2} \tag{45}$$

因此，由标称参数求解出的框架角速度指令会导致视轴坐标系绕 y 和 z 方向小幅晃动。参数标定后，视轴坐标系绕 y 和 z 方向的角速度为零，稳定效果较好。

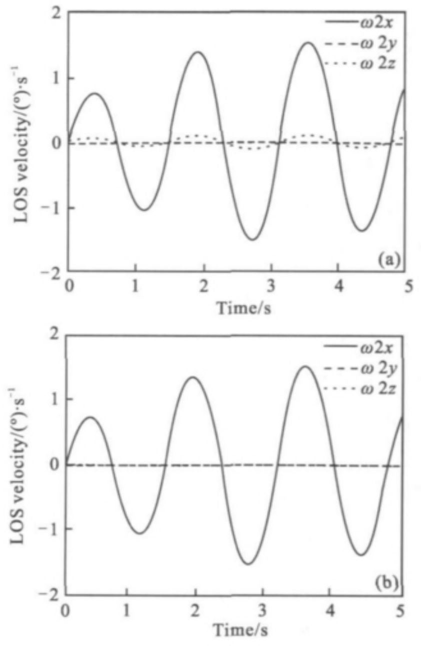

图 5 视轴坐标系角速度

Fig.5 Angular velocity for LOS

由标定参数计算得到的角速度指令作为俯仰和偏航框架的速度环输入，采用图 3 所示的控制结构可以计算出俯仰和偏航框架的驱动力矩。在仿真过程中，设置 ω_{m} 为弹体运动角速度 ω_0 在俯仰和偏航轴上的投影，俯仰框模型参数为：

$$J=0.0003 \quad G_{\mathrm{v}}(s)=\frac{2.853(0.12s+1)}{s(0.001s+1)}$$

偏航框模型参数为：

$$J=0.0005 \quad G_{\mathrm{v}}(s)=\frac{9.1(0.055s+1)}{s(0.0018s+1)}$$

俯仰和偏航框架驱动力矩的计算结果如图 6 所示。

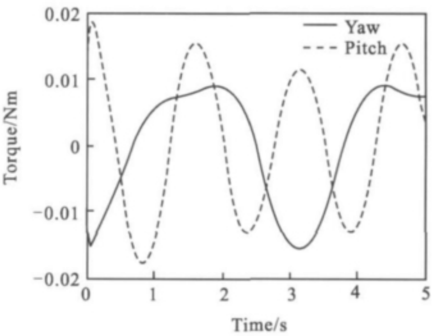

图 6 俯仰偏航框架驱动力矩

Fig.6 Torques for pitch and yaw gimble

5 结 论

提出了一种基于指数积公式的导引头框架运动学分析和标定方法。运动学方程相对于误差参数线性化,得到运动学标定模型。将运动学误差参数归结于框架坐标系的初始姿态,简化了运动学参数的标定过程。采用标定后的运动学方程求解使视轴惯性空间稳定的框架角速度指令,与标定前相比,视轴惯性稳定方程的求解精度显著提高。数值仿真结果验证了算法的有效性。

参考文献:

[1] Jacquies W. Line-of-sight rate estimation and linearizing control of an imaging seeker in a tactical missile guided by proportional navigation [J]. ***IEEE Transactions on Control System Technology***, 2002, 10 (4): 556-567.

[2] Russell T R. Strapdown stabilization for imaging seekers[C]// Proceedings of the AIAA SDIO 2nd Annual Interceptor Technology Conference, Albuquerque, NM, 1993.

[3] Mao Xia, Zhang Junwei. Light axis stabilization of half-strapdown seeker[J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2007, 36 (1): 9-12. (in Chinese)
毛峡, 张俊伟. 半捷联导引头光轴稳定的研究[J]. **红外与激光工程**, 2007, 36 (5): 9-12.

[4] Zhang Yue, Liu Bo, Yin Shengli. Strapdown optical seeker stabilization, tracking principle and system simulation [J]. ***Optics and Precision Engineering***, 2008, 16(10): 1942-1948. (in Chinese)
张跃, 刘波, 阎胜利. 捷联式光学导引头的稳定、跟踪原理与系统仿真[J]. **光学 精密工程**, 2008, 16(10): 1942-1948.

[5] Kennedy P J, Kennedy R L. Direct versus indirect line of sight (LOS) stabilization [J]. ***IEEE Transactions on Control System Technology***, 2003, 11 (1): 3-15.

[6] Zhou Ruiqing, Lv Shanwei, Liu Xinhua. Comparison of two stabilization methods for airborne strapdown antenna platform [J]. ***Systems Engineering and Electronics***, 2005, 27 (8): 1397-1400. (in Chinese)
周瑞青, 吕善伟, 刘新华. 弹载捷联式天线平台两种稳定实现方法的比较 [J]. **系统工程与电子技术**, 2005, 27(8): 1397-1400.

[7] Zhu Huazheng, Fan Dapeng, Zhang Wenbo, et al. Influence analysis of the mass imbalance torque on the performance of seeker servo mechanism[J]. ***Infrared and Laser Engineering***, 2009, 38 (5): 767-772. (in Chinese)
朱华征, 范大鹏, 张文博, 等. 质量不平衡力矩对导引头伺服机构性能影响分析 [J]. **红外与激光工程**, 2009, 38(5): 767-772.

[8] Chen I, Yang G, Tan C, et al. Local POE model for robot kinematic calibration [J]. ***Mechanism and Machine Theory***, 2001, 36 (11-12): 1215-1239.

[9] Pashkevich A, Chablat D, Wenger P. Kinematic calibration of orthoglide-type mechanisms from observation of parallel leg motions [J]. ***Mechatronics***, 2009, 19 (4): 478-488.

[10] Chen I, Yang G, Kang I. Numerical inverse kinematics for modular reconfigurable robots[J]. ***Journal of Robotic Systems***, 1999, 16 (4): 213-225.