

# 超椭球凸集合可靠性综合指标定义及求解方法

周凌<sup>1,\*</sup>, 安伟光<sup>2</sup>, 贾宏光<sup>1</sup>

1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033

2. 哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001

**摘要:** 针对失效域与超椭球凸集合发生干涉与不发生干涉两种情况下,超椭球凸集合非概率可靠性与非概率可靠度两种指标各自存在的不足,将两指标相结合提出多个超椭球凸集合描述时的可靠性综合指标定义,并提出将改进的有限步长迭代法(MLSA)与 Monte-Carlo 法结合起来求解综合指标的方法。MLSA 是在有限步长迭代法的基础上提出的,根据增广拉格朗日函数的极值条件构造了一个新的评价函数,并引入黄金分割法对步长进行一维搜索得到最优步长从而加速收敛。数值算例表明,用 MLSA 求解多个超椭球凸集合描述时的非概率可靠性指标的结果正确,并具有很好的收敛性,用超椭球凸集合可靠性综合指标评价超空泡射弹屈曲非概率可靠性程度更加合理。

**关键词:** 超椭球凸集合; 可靠性综合指标; 改进的有限步长迭代法; Monte-Carlo 法; 评价函数; 超空泡射弹; 屈曲可靠性

**中图分类号:** V215.7; O213.2; TB114.3 **文献标识码:** A

目前工程结构系统中不确定信息主要有随机、模糊与未知而有界 3 种描述形式,其数学基础分别是概率论、模糊集理论与凸集理论(区间数学)。当结构样本数据较少时,无法得到不确定变量准确的概率分布,概率分布的微小差异会使得概率可靠性的度量结果差别很大<sup>[1]</sup>。此时模糊可靠性的隶属函数确定也较为困难,且大多带有为主观色彩,因而概率与模糊可靠性分析的结果不能令人满意。但是在工程中不确定变量的不确定边界是容易确定的,所以当无法给出准确的概率分布时,基于不确定变量的未知而有界描述的非概率可靠性度量可作为概率可靠性的一种补充方法。

自从 Ben-Haim 提出非概率可靠性的概念<sup>[2]</sup>以来,国内外学者提出了不同的非概率可靠性模型或针对原有的非概率可靠性模型指标计算的困

难提出相应的求解方法。Ben-Haim<sup>[3]</sup>在原概念的基础上,提出结构线性系统的鲁棒可靠性理论,并给出非概率凸模型的鲁棒可靠性准则。邱志平等<sup>[4]</sup>在指出 Ben-Haim 鲁棒可靠性准则错误的同时,提出了安全与失效的关系应对应凸集合间的偏序关系的新准则。Elishakoff<sup>[5]</sup>基于区间分析方法,提出可靠性指标是一区间而非具体值,区间的边界是根据传统的安全因子法进行区间运算而得到的。吕震宙等<sup>[6]</sup>基于模糊可靠性理论中的隶属函数及概率可靠性思想,将含有区间变量的函数看做均匀分布函数,然后将此函数的均匀分布概率密度函数与隶属函数相乘,并在不确定域上进行积分得到可靠性指标。郭书祥等<sup>[7]</sup>基于区间分析方法,定义了一种新的非概率可靠性指标,即将结构功能函数的均值与离差的比值作为非概率可靠性的评价标准,并从几何和物理涵义上解释

收稿日期: 2011-03-15; 退修日期: 2011-04-14; 录用日期: 2011-06-17; 网络出版时间: 2011-07-26 16: 49

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20110726.1649.001.html

DOI: CNKI:11-1929/V.20110726.1649.001

\* 通讯作者. Tel.: 0431-86708827 E-mail: hszl007@163.com

**引用格式:** 周凌, 安伟光, 贾宏光. 超椭球凸集合可靠性综合指标定义及求解方法 [J]. 航空学报, 2011, 32(11): 2025-2035. Zhou Ling, An Weiguang, Jia Hongguang. Definition and solution of reliability comprehensive index of super-ellipsoid convex set [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(11): 2025-2035.

了其合理性。曹鸿钧等<sup>[8]</sup>给出了超椭圆凸集合模型与区间变量共存情况下的非概率可靠性指标 $\eta'$ 的定义,并给出了其求解算法。王晓军等<sup>[9]</sup>用结构安全域的体积与基本区间变量域的总体积之比作为结构非概率集合可靠性的度量,并证明了它与概率可靠性度量的相容性。乔心州等<sup>[10]</sup>借鉴文献<sup>[9]</sup>提出的非概率区间可靠度思想,建立了 $0 \leq \eta' \leq 1$ 时基于超椭圆凸集合的非概率可靠性度量方法,并证明了其与概率模型的相容性。江涛等<sup>[11]</sup>针对基于区间变量的非线性功能函数的非概率可靠性指标难以求取的问题,提出了求取非概率可靠性指标的一维优化方法。郭书祥等<sup>[12]</sup>在区间变量一般运算基础上,给出了非概率可靠性指标求解的定义法、转换法和优化法3种方法。罗阳军等<sup>[13]</sup>运用能保证收敛的验算点法(HL-RF)的修正迭代公式求解基于超椭圆凸集合的非概率可靠性指标。Kang等<sup>[14]</sup>定义了多个超椭圆凸集合描述结构系统不确定性情况下的非概率可靠性指标,并给出了非概率可靠性指标约束时大变形连续体结构的拓扑优化方法。Luo等<sup>[15]</sup>将概率与凸集合混合模型描述下的结构可靠性指标定义为嵌套的最小值问题,并给出了在标准不确定空间中搜索最坏点和最有可能失效点的迭代步骤。

本文针对文献<sup>[8]</sup>与文献<sup>[10]</sup>给出的两种超椭圆凸集合非概率可靠性指标各自存在的片面性,将两指标相结合提出了多个超椭圆凸集合描述时的可靠性综合指标定义,并将改进的有限步长迭代法(MLSA)与Monte-Carlo法结合起来求解综合指标,最后通过工程算例说明综合指标及其求解方法有很好的适用性。

## 1 两种指标各自存在的片面性

通过单个超椭圆凸集合描述时的非概率可靠性度量来说明两种指标各自的片面性。

当只有一个超椭圆凸集合时,文献<sup>[8]</sup>给出的非概率可靠性指标 $\eta'$ 定义为标准化单位超球扩展空间中从原点到极限状态方程的最短距离,即

$$\eta' = \operatorname{sgn}(g'(0)) \min_{\Delta v} \sqrt{\Delta v^T \Delta v} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } g'(\Delta v) = g(\mathbf{Y}) = 0$$

式中: $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为正负号函数; $\Delta v$ 为单位超球空间向量; $\mathbf{Y}$ 为超椭圆空间向量; $g'(\Delta v)$ 与 $g(\mathbf{Y})$ 分别为单位超球与超椭圆空间中的极限状态方程。

文献<sup>[10]</sup>的超椭圆凸集合非概率可靠度 $R'_{\text{set}}$ 定义为标准化超球空间中安全域的超体积 $V'_s$ 与超球体的总体积 $V'_{\text{ALL}}$ 之比,即

$$R'_{\text{set}} = \eta'(g' > 0) = \frac{V'_s}{V'_{\text{ALL}}} \quad (2)$$

下面结合图1所示的二维标准化空间来说明上述两种非概率可靠性指标各自存在的片面性。

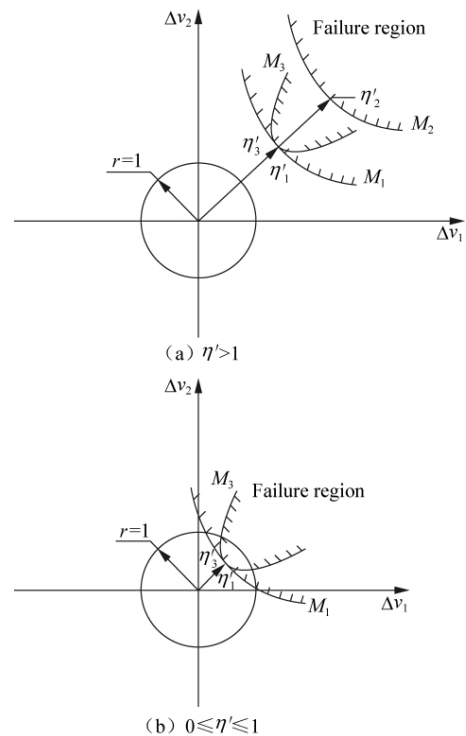


图1 二维标准化空间

Fig. 1 Two-dimensional normalized space

如图1(a)所示,极限状态曲面 $M_2$ 的 $\eta'_2$ 大于 $M_1$ 的 $\eta'_1$ ,表明 $M_2$ 的可靠度大于 $M_1$ 的可靠度,真实地反映了超椭圆凸集合离失效域的远近,即当失效域与超椭圆凸集合不发生干涉时, $\eta'$ 对于不同的极限状态曲面能够很好地度量它们的非概率可靠性程度并且相互之间可以比较。只要极限状态曲面上的最有可能失效点重合或其到原点的距离相等,则不同的极限状态曲面的 $\eta'$ 相等,如

$M_1$  的  $\eta'_1$  与  $M_3$  的  $\eta'_3$  相等。当失效域与超椭圆凸集合发生干涉时,如图 1(b)所示,尽管  $M_1$  的  $\eta'_1$  与  $M_3$  的  $\eta'_3$  相等,但可以看出  $M_1$  和  $M_3$  与圆域干涉的面积不同,此时  $\eta'$  已不能很好地度量结构的非概率可靠性程度。从本质上看, $\eta'$  表示的扩展几何涵义只包含了极限状态曲面上最可能失效点这一点的信息,这对于不发生干涉时度量结构的绝对安全程度是合理的,物理意义也是明确的,但当失效域与超椭圆凸集合发生干涉时,结构的绝对安全已不存在,只考虑最可能失效点这一点的信息是不够的,应该考虑干涉域的信息并对其进行度量才合理,因而此时  $\eta'$  已无明确物理涵义,需采用  $R'_{\text{set}}$  来度量结构的非概率可靠度。但对于不发生干涉的情况, $R'_{\text{set}}$  对于不同的极限状态曲面给出的可靠度始终为 1,如图 1(a)中的  $M_1$  和  $M_2$  的可靠度均为 1,不能对不同的极限状态曲面的非概率可靠性程度进行比较,更不能体现 Ben-Haim 非概率可靠性的思想。

从以上分析可知, $\eta'$  无法度量失效域与超椭圆凸集合干涉时的可靠性, $R'_{\text{set}}$  无法度量失效域与超椭圆凸集合不发生干涉时的可靠性,因而可将两种度量指标相结合,提出超椭圆凸集合可靠性综合指标的概念。

## 2 综合指标定义与求解算法

针对上述两种指标各自存在的片面性,定义一种多个超椭圆凸集合描述时的可靠性综合指标  $\kappa'$ ,即

$$\kappa' = \begin{cases} \eta' & \eta' > 1 \\ R'_{\text{set}} & 0 \leq \eta' \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $R'_{\text{set}}$  为非概率可靠度,与单个超椭圆凸集合时相同,如式(2)所示; $\eta'$  为非概率可靠性指标,与单个超椭圆凸集合时的表达式不同,其为

$$\eta' = \text{sgn}(g'(0)) \min_{\Delta \mathbf{v}} \left( \max_{i=1,2,\dots,k} \delta_i = \sqrt{\Delta \mathbf{v}_i^T \Delta \mathbf{v}_i} \right) \quad \text{s.t.} \quad g'(\Delta \mathbf{v}) = g(\mathbf{Y}) = 0 \quad (4)$$

式中: $\delta_i$  为第  $i$  个超椭圆凸集合的等效区间变量。对于用多个超椭圆凸集合描述结构的不确定参数的情况,其非概率可靠性指标  $\eta'$  为极小-极大值问题。当每一个超椭圆中只有一个变量

的特殊情况时, $\eta'$  为多个区间变量描述时的非概率区间可靠性指标  $\eta$ ,所以式(4)统一了超椭圆凸集合与非概率区间两种描述形式下的非概率可靠性指标度量。文献[11]证明了非概率区间可靠性指标  $\eta$  只可能存在于无穷空间中通过原点和区间集合顶点的超射线与标准化失效面的某一交点处,即

$$\begin{cases} g''(\pm \delta_1, \pm \delta_2, \dots, \pm \delta_k) = g'(\Delta \mathbf{v}) = 0 \\ |\pm \delta_1| = |\pm \delta_2| = \dots = |\pm \delta_k| \end{cases} \quad (5)$$

则可将  $\eta'$  的极小-极大值问题转换为求解标准空间中的原点到极限状态曲面最短距离的问题,即

$$\begin{aligned} \eta' &= \text{sgn}(g'(0)) \frac{1}{\sqrt{k}} \min_{\Delta \mathbf{v}} \sqrt{\sum_{i=1}^k \delta_i} \\ \text{s.t.} \quad G(\Delta \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \left\{ (g'(\Delta \mathbf{v}))^2 + \right. \\ &\left. C \left[ \sum_{i=1}^{k-1} (\delta_i - \delta_{i+1})^2 + (\delta_k - \delta_1)^2 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $C$  为权重系数。构造新的极限状态方程约束函数  $G(\Delta \mathbf{v})$ ,既保证求得  $\eta'$  处的坐标值在极限状态曲面上,又保证满足式(5)的必要条件,且通过权重  $C$  可加速使式(5)的条件得到满足。令  $k=1$ ,则式(6)可退化为式(1)所示的单个超椭圆凸集合描述时的情况。由式(6)可知,同样可采用与概率可靠性指标求解类似的改进的一次二阶矩法迭代求解  $\eta'$ ,两者只是迭代空间与极限状态方程的约束函数不同。

在计算  $\kappa'$  之前需计算  $\eta'$ ,针对极限状态方程非线性程度较高时,改进的一次二阶矩法迭代不收敛的情况,文中采用 MLSA 求解  $\eta'$ 。MLSA 是在贡金鑫教授提出的有限步长迭代法<sup>[16]</sup>的基础上,通过对迭代步长进行一维搜索,来保证每一迭代步长均为最优步长,从而加速收敛,且无需多次试算来确定保证收敛的初始步长,解决了在功能函数非线性程度极高时保证收敛的初始步长难于确定的问题<sup>[17]</sup>。Liu 等<sup>[18]</sup>根据拉格朗日函数的两个极值条件构造了非负的评价函数作为步长一维搜索的依据,但拉格朗日函数的极小值需通过鞍点来求得,而鞍点不一定存在,因而即使目标函数有极小值,也未必能通过寻找拉格朗日函数的极值得到,该问题可以通过增广拉格朗日函数解决,因而根据增广拉格朗日函数的极值条件构造

了一个新的评价函数  $m(\Delta v)$ , 即

$$m(\Delta v) = \left\| \Delta v - \frac{(\nabla G(\Delta v))^T \Delta v}{\|\nabla G(\Delta v)\|^2} \nabla G(\Delta v) + r_1 G(\Delta v) \nabla G(\Delta v) \right\|^2 \quad (7)$$

式中:  $r_1$  为罚系数。在标准化空间中, 有限步长迭代法的迭代公式为

$$\begin{cases} \alpha^{(k+1)} = \frac{\Delta v^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla G(\Delta v^{(k)})}{\|\Delta v^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla G(\Delta v^{(k)})\|} \\ \eta'^{(k+1)} = -\frac{G(\Delta v^{(k)}) - (\nabla G(\Delta v^{(k)}))^T \Delta v^{(k)}}{(\alpha^{(k+1)})^T \nabla G(\Delta v^{(k)})} \\ \Delta v^{(k+1)} = \alpha^{(k+1)} \eta'^{(k)} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\alpha$  为灵敏度系数;  $\lambda$  为可调节步长; 上标“(k)”代表迭代步数。其中  $\nabla G(\Delta v)$  的表达式为

$$\begin{aligned} \nabla G(\Delta v) &= g'(\Delta v) \nabla g'(\Delta v) + \\ &C \sum_{i=1}^{k-1} (\delta_i - \delta_{i+1}) \left( \pm \frac{\partial \delta_i}{\partial \Delta v} \mp \frac{\partial \delta_{i+1}}{\partial \Delta v} \right) + \\ &C (\delta_k - \delta_1) \left( \pm \frac{\partial \delta_k}{\partial \Delta v} \mp \frac{\partial \delta_1}{\partial \Delta v} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: 正负号的选取由式(10)决定。

$$\pm \frac{\partial \delta_i}{\partial \Delta v} = \begin{cases} \frac{\partial \delta_i}{\partial \Delta v} & \text{sgn}(g'(\Delta v)) \geq 0 \\ & \Delta v_i = 0 \\ & \Delta v_j \neq 0, j \neq i \\ -\frac{\partial \delta_i}{\partial \Delta v} & \text{sgn}(g'(\Delta v)) < 0 \\ & \Delta v_i = 0 \\ & \Delta v_j \neq 0, j \neq i \\ (i = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (10)$$

当用 MLSA 求得  $\eta'$  之后, 若  $0 \leq \eta' \leq 1$  则需求  $R'_{\text{set}}$  值, 但对于多维非线性功能函数, 安全域的体积很难计算。文献[10]证明了超椭球凸集合非概率可靠度  $R'_{\text{set}}$  度量与超椭球内均匀分布随机变量的概率度量之间的相容性, 因而提出采用 Monte-Carlo 法求解  $R'_{\text{set}}$ , 在各单位超球变量  $\Delta v_i$  空间中进行均匀采样。假设第  $i$  个超球空间的维数为  $m$ , 则其超球坐标为  $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1})$ ,  $r^m$  在  $[0, 1]$  上均匀取值,  $\theta_l$  在  $[0, 2\pi]$  上均匀取值, 在产生随机数  $\xi_l$  之后, 则可得到球坐标  $r$  及  $\theta_l$  的抽样值为

$$\begin{cases} r_{F(\xi_l)}^m = 0 + (1 - 0)\xi_l = \xi_l \\ \theta_{F(\xi_l)} = 0 + (2\pi - 0)\xi_l = 2\pi\xi_l \\ (l = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (11)$$

然后再将球坐标转换到直角坐标中的  $\Delta v_i$  空间, 其转换式为

$$\Delta v_i = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_{m-1} \\ \Delta v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1} \\ r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{m-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

对于每个超椭球中只有一个变量, 即多个区间变量  $\Delta v_l (l=1, 2, \dots, m)$  的情况, 有

$$\Delta v_l = -1 + [1 - (-1)]\xi_l = 2\xi_l - 1 \quad (13)$$

将  $\Delta v$  代入到标准化空间中的极限状态方程  $g'(\Delta v)$  中, 得非概率可靠度  $R'_{\text{set}}$  的表达式为

$$R'_{\text{set}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1}{n} \quad (14)$$

式中:  $k_1$  为  $g'(\Delta v) > 0$  的次数;  $n$  为计算的总次数。

下面给出综合指标  $\kappa'$  的具体求解步骤:

步骤 1 首先将第  $i$  个超椭球凸集合  $Y_i$  向量转化成单位超球空间中的  $\Delta v_i$  向量, 假设超椭球凸集合  $E_i$  为

$$E_i = \{Y_i: Y_i \in \mathbf{R}^m, (Y_i - Y_{i0})^T W_i (Y_i - Y_{i0}) \leq \phi_i^2\} \quad (15)$$

式中:  $Y_{i0}$  为超椭球中心;  $W_i$  为描述超椭球形状的已知正定矩阵;  $\phi_i$  为确定超椭球大小的已知正实数, 则其转换式为

$$\begin{cases} v_i = \Lambda_i^{1/2} \bar{P}_i Y_i / \phi_i \\ v_{i0} = \Lambda_i^{1/2} \bar{P}_i Y_{i0} / \phi_i \\ \Delta v_i = v_i - v_{i0} \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $\Lambda_i$  为对角阵;  $\bar{P}_i$  为正交矩阵;  $W_i = \bar{P}_i^T \Lambda_i \bar{P}_i$ 。

步骤 2 设置初始参数, 令  $k=0$ ,  $\Delta v^{(k)} = \mathbf{0}$ , 并设定正实常数  $c$ 、权重系数  $C$ 、初始罚系数  $r_1^{(0)}$  及其调节系数  $\chi$ , 确定步长  $\lambda^{(k)}$  搜索区间的搜索初始值  $\lambda_0$  及搜索初始步长  $\lambda_h$ 、循环终止判别准则  $\varepsilon$  及终止步数  $N$ 。

步骤 3 由  $\lambda_0$ 、 $\lambda_h$  及  $\Delta v^{(k)}$  首先确定最优步长  $\lambda^{(k)}$  的搜索区间  $[\lambda_{\text{low}}^{(k)}, \lambda_{\text{up}}^{(k)}]$ , 即

(1) 将  $\lambda^1 = \lambda_0 + \lambda_h$  及  $\Delta v^{(k)}$  代入到式(8)得到  $\eta'_1$  及  $\Delta v^1$ , 并将  $\Delta v^1$  与  $\Delta v^{(k)}$  代入到式(7)得到  $m(\Delta v^1)$  和  $m(\Delta v^{(k)})$ 。

(2) 若  $k = 0$ , 则  $\lambda^{(k)} = \lambda^1$ ,  $\eta'^{(k+1)} = \eta'_1$ ,  $\Delta v^{(k+1)} = \Delta v^1$ ,  $m(\Delta v^{(k+1)}) = m(\Delta v^1)$ , 并执行步骤 5; 否则执行(3)。

(3) 若  $m(\Delta v^{(k)}) \geq m(\Delta v^1)$ , 则计算  $\lambda^j = \lambda_0 + 2^{j-1} \lambda_h$  ( $j = 2, 3, \dots$ ), 并相应得到  $\eta'_j$ 、 $\Delta v^j$  及  $m(\Delta v^j)$ , 直到  $m(\Delta v^{j-1}) < m(\Delta v^j)$  或  $j > N$  时停止计算。若  $j > N_1$ , 则  $\lambda^{(k+1)} = \lambda^j$ ,  $\eta'^{(k+1)} = \eta'_j$ ,  $\Delta v^{(k+1)} = \Delta v^j$ ,  $m(\Delta v^{(k+1)}) = m(\Delta v^j)$ , 并执行步骤 5; 否则令  $\lambda^r = (\lambda^j + \lambda^{j-1})/2$ , 并相应求得  $\eta'_r$ 、 $\Delta v^r$  及  $m(\Delta v^r)$ , 若  $m(\Delta v^{j-1}) \geq m(\Delta v^r)$ , 则  $\lambda_{\text{low}}^{(k)} = \lambda^{j-1}$ ,  $\lambda_{\text{up}}^{(k)} = \lambda^j$ ; 否则,  $\lambda_{\text{low}}^{(k)} = \lambda^{j-2}$ ,  $\lambda_{\text{up}}^{(k)} = \lambda^r$ 。

(4) 若  $m(\Delta v^{(k)}) < m(\Delta v^1)$ , 则  $\lambda_{\text{low}}^{(k)} = \lambda^0$ ,  $\lambda_{\text{up}}^{(k)} = \lambda^1$ 。

然后采用黄金分割法在区间  $[\lambda_{\text{low}}^{(k)}, \lambda_{\text{up}}^{(k)}]$  内搜索最佳步长  $\lambda^{(k)}$ , 并由标准化空间中的有限步长迭代式(8)及式(7)相应求得  $\eta'^{(k+1)}$ 、 $\Delta v^{(k+1)}$  及  $m(\Delta v^{(k+1)})$ 。

**步骤 4** 若黄金分割法搜索得到的  $m(\Delta v^{(k+1)}) > m(\Delta v^{(k)})$ , 则令  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)}/c$ , 重新计算  $\eta'^{(k+1)}$ 、 $\Delta v^{(k+1)}$  及  $m(\Delta v^{(k+1)})$ 。

**步骤 5** 先由式(17)确定罚系数  $r_1^{(k+1)}$ , 即

$$r_1^{(k+1)} = \begin{cases} \chi r_1^{(k)} & g'(\Delta v^{(k)})/g'(\Delta v^{(k-1)}) > 0.25 \\ r_1^{(k)} & g'(\Delta v^{(k)})/g'(\Delta v^{(k-1)}) \leq 0.25 \end{cases} \quad (17)$$

再令  $k = k + 1$ , 若  $\|\Delta v^{(k+1)} - \Delta v^{(k)}\| < \epsilon$  则停止迭代, 否则执行步骤 3。

**步骤 6** 若  $\eta' > 1$ , 则  $\kappa' = \eta'$ ; 若  $0 \leq \eta' \leq 1$ , 则采用式(11)~式(14)组成的 Monte-Carlo 法计算  $R'_{\text{set}}$ , 此时  $\kappa' = R'_{\text{set}}$ 。

其中步骤 2~步骤 5 为用 MLSA 求解  $\eta'$ , 一般初始罚系数  $r_1^{(0)} > 0$ , 步长调节系数  $c$  与  $\chi$  取 1.2~1.5, 权重系数  $C$  取正实常数,  $N$  为较大的

正整数。考虑到步长  $\lambda^{(k)}$  的取值范围是  $[0, \infty)$ , 因而可令搜索初始值  $\lambda_0 = 0$ , 并只需在  $[0, \infty)$  一个方向上搜索, 搜索初始步长  $\lambda_h$  可取为正的实常数。当迭代验算点接近最终解时, 黄金分割法搜索得到的评价函数  $m(\Delta v)$  未必逐步下降, 这是因为此时的迭代方向未必是评价函数  $m(\Delta v)$  的下降方向, 可通过步骤 4 的步长缩短来加速迭代的收敛。

### 3 数值验证算例

下面通过文献[13]的算例 1 与文献[7]的算例 2 来证明采用 MLSA 求解  $\eta'$  的正确性。算例 1 与算例 2 分别对应单个超椭圆与多个区间变量(多个超椭圆, 每个超椭圆中只有一个变量)两种特殊情况。

**算例 1** 结构的极限状态方程为

$$g'(\Delta v) = (\Delta v_1 + 3.0)^3 + (\Delta v_2 + 2.9)^3 - 4.0 = 0 \quad (18)$$

表 1 列出了采用 MLSA 求解算例 1 的  $\eta'$  的迭代过程, MLSA 迭代 5 步就收敛了, 功能函数  $g'(\Delta v)$  与评价函数  $m(\Delta v)$  均能从较大数迅速收敛于 0。与文献[13]算例 1 的迭代结果一样, 比有限步长迭代法与修正迭代法的迭代步数少, 说明 MLSA 计算  $\eta'$  的正确性, 且对于非线性程度较高的结构功能函数具有较好的收敛性。由表 1 中  $\lambda^{(k)}$  值可知, 黄金分割法搜索到的每一迭代步的最优步长是不一样的, 并且整个迭代过程的  $\lambda^{(k)}$  值变化情况不能用简单的函数来描述, 且  $\lambda^{(k)}$  不是呈下降趋势, 因而在极限状态曲面非线性程度极高时有限步长迭代法中通过缩小步长来加速收敛未必有效。此时  $\eta' = 2.3909 > 1$ , 则综合指标  $\kappa' = \eta' = 2.3909$ 。

表 1 迭代过程列表

Table 1 List of iterative processes

$k$	$\Delta v_1^{(k)}$	$\Delta v_2^{(k)}$	$g'(\Delta v^{(k)})$	$m(\Delta v^{(k)})$	$\lambda^{(k)}$	$\eta'^{(k)}$
0	0	0	47.389 0	$1.2836 \times 10^{10}$	1.000 0	
1	-0.937 0	-0.875 6	13.077 1	$5.3730 \times 10^4$	0.080 7	1.282 4
2	-1.464 9	-1.390 9	3.054 0	$1.2981 \times 10^3$	0.068 5	2.020 1
3	-1.686 6	-1.608 6	0.419 5	13.133 6	0.095 1	2.330 7
4	-1.726 2	-1.651 4	0.013 2	0.011 4	0.134 2	2.388 9
5	-1.726 6	-1.653 8	$2.1691 \times 10^{-5}$	$3.0110 \times 10^{-8}$	0.111 8	2.390 9

算例 2 结构的极限状态方程为

$$M = m_{cr} - p_1 b_1 - p_2 b_2 = 0 \quad (19)$$

区间变量为:  $p_1 \in [4.4, 5.6]$ ,  $p_2 \in [1.7, 2.3]$ ,  $b_1 \in [1.8, 2.2]$ ,  $b_2 \in [4.5, 5.5]$ ,  $m_{cr} \in [32, 40]$ 。在标准化空间中的极限状态方程为

$$g'(\delta_i) = 36 + 4\delta_m - (5 + 0.6\delta_{p_1})(2 + 0.2\delta_{b_1}) - (2 + 0.3\delta_{p_2})(5 + 0.5\delta_{b_2}) = 0 \quad (20)$$

图 2 给出了 5 个区间变量  $\delta_i$ 、 $\eta'$  和  $g'$  的迭代过程图。从图 2 可以看出, 用 MLSA 求解时, 区间变量的  $\eta'$  值迅速收敛,  $\delta_i$  的轨迹没有出现明显的迂回迭代及严重的振荡现象。从最终的迭代收

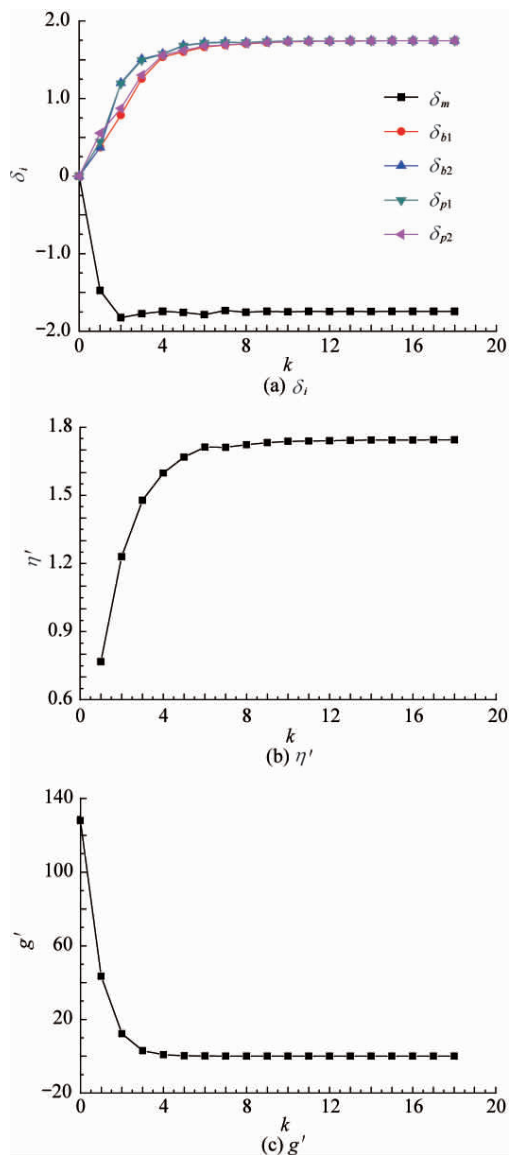


图 2 算例 2 中  $\delta_i$ 、 $\eta'$  和  $g'$  的迭代过程图

Fig 2 Iterative process graphs of  $\delta_i$ ,  $\eta'$  and  $g'$  in Example 2.

敛值  $\eta' = 1.74$  可以证明采用 MLSA 求解区间变量的  $\eta'$  值的正确性。

从上述两个特殊的数值验证算例可知, MLSA 求解多个超椭球凸集合的非概率可靠性指标  $\eta'$  是可行的, 且迭代收敛速度较快。下面给出工程结构算例说明超椭球凸集合可靠性综合指标具有更好的适应性。

#### 4 工程结构算例

超空泡射弹在水下高速运行时所受的轴向力很大, 故其结构容易产生屈曲问题。另外考虑到射弹结构参数与流动参数的不确定性, 有必要对其进行屈曲可靠性分析<sup>[19]</sup>。由于试验数据样本较少, 无法得到不确定变量准确的概率分布, 因而采用超椭球凸集合进行描述。图 3 给出了超空泡射弹示意图, 其中:  $L$  为射弹长度;  $d_n$  为圆盘空化器直径;  $d_B$  为底部直径;  $F_D$  为空化器阻力;  $v$  为射弹速度。

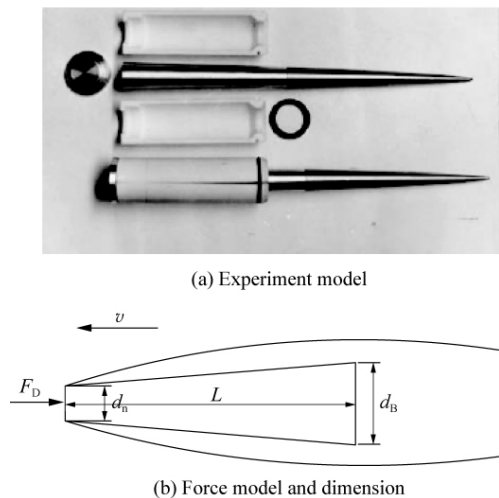


图 3 超空泡射弹示意图

Fig 3 Schematic diagram of supercavitating projectile

根据伽辽金法即可确定超空泡射弹变截面梁的临界屈曲载荷, 具体推导过程参见文献<sup>[19]</sup>, 文献<sup>[17]</sup>给出了射弹临界屈曲载荷求解的矩阵形式, 即

$$[A + F_D(P - Q)]C = 0 \quad (21)$$

式中:  $F_D$  为空化器阻力;  $A$  和  $P$  为对称矩阵;  $Q$  为非对称矩阵。由于各矩阵元素较为繁琐因而不一一给出, 下面只给出  $n=2$  时矩阵  $A$ 、 $P$  及  $Q$  的具

体表达式,即

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{Ed_n^4}{L^3} \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} p_{11}(\alpha) & p_{12}(\alpha) \\ p_{21}(\alpha) & p_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=0}^8 q_{i11}^i(d_n, L) \alpha^i}{\sum_{i=0}^8 q_{i12}^i(d_n, L) \alpha^i} & \frac{\sum_{i=0}^8 q_{i21}^i(d_n, L) \alpha^i}{\sum_{i=0}^8 q_{i22}^i(d_n, L) \alpha^i} \\ \frac{\sum_{i=0}^8 q_{i12}^i(d_n, L) \alpha^i}{\sum_{i=0}^8 q_{i21}^i(d_n, L) \alpha^i} & \frac{\sum_{i=0}^8 q_{i22}^i(d_n, L) \alpha^i}{\sum_{i=0}^8 q_{i22}^i(d_n, L) \alpha^i} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (22)$$

式中: $E$ 为射弹的弹性模量; $a_{ik}(\alpha)$ 和 $p_{ik}(\alpha)$  ( $i, k=1, 2$ )为关于 $\alpha$ 的表达式, $\alpha=d_B/d_n$ ;  $q_{ik1}^i(d_n, L)$ 和 $q_{ik2}^i(d_n, L)$ 为关于 $d_n$ 和 $L$ 的表达式,它们的具体表达式参见文献[17]。通过求解式(21)中 $F_D$ 的特征值问题确定超空泡射弹的临界屈曲载荷 $F_{D,cr}$ ,并得到其对应的特征向量 $\mathbf{C}$ 。

将 $F_{D,cr}$ 作为强度,空化器阻力 $F_D$ 作为应力,则超空泡射弹结构屈曲安全余量方程为

$$g(\mathbf{Y}) = F_{D,cr}(E, d_n, L) - F_D(C_x, v, d_n) = 0 \quad (23)$$

式中: $\mathbf{Y}=[E \ L \ d_n \ C_x \ v]^T$ 为不确定向量,并采用多个超椭圆来描述, $C_x$ 为空化器阻力系数。空化器阻力 $F_D$ 的表达式为<sup>[19]</sup>

$$F_D = \frac{C_x \rho_w v^2 \pi d_n^2}{8} \quad (24)$$

式中: $\rho_w$ 为水的密度。

采用MLSA求解多个超椭圆凸集合的非概率可靠性指标 $\eta'$ 时,会用到结构屈曲功能函数对不确定变量的一阶偏导,即

$$\frac{\partial g'(\Delta \mathbf{v})}{\partial \Delta v_i} = \frac{\partial g(\mathbf{Y})}{\partial \Delta v_i} = \left( \frac{\partial F_{D,cr}}{\partial Y_i} - \frac{\partial F_D}{\partial Y_i} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial \Delta v_i} \quad (25)$$

式中: $Y_i$ 为不确定变量。 $F_D$ 对 $Y_i$ 的偏导相对简单,而 $F_{D,cr}$ 是相对复杂的隐函数,下面给出 $F_{D,cr}$ 对 $Y_i$ 的偏导。将式(21)对 $Y_i$ 求偏导,并左乘 $\mathbf{C}^T$ ,然后进行相应的转换即可得到

$$\frac{\partial F_{D,cr}}{\partial Y_i} = \frac{\mathbf{C}^T \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial Y_i} F_{D,cr} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Y_i} F_{D,cr} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial Y_i} \right) \mathbf{C}}{\mathbf{C}^T (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \mathbf{C}} \quad (26)$$

式中:需用到矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$ 对随机变量 $E$ 、 $d_n$ 、 $L$ 、 $C_x$ 及 $v_0$ 的偏导矩阵, $n=2$ 时,各偏导矩阵的表达式分别为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial E} = \frac{d_n^4}{L^3} \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial d_n} = \frac{4Ed_n^3}{L^3} \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial L} = -\frac{3Ed_n^4}{L^4} \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L} = -\frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} p_{11}(\alpha) & p_{12}(\alpha) \\ p_{21}(\alpha) & p_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (27d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(i, k)}{\partial d_n} =$$

$$\frac{\left( \sum_{i=0}^8 \frac{\partial q_{ik1}^i(d_n, L)}{\partial d_n} \alpha^i \right) \left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)}{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)^2}$$

$$\frac{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik1}^i(d_n, L) \alpha^i \right) \left( \sum_{i=0}^8 \frac{\partial q_{ik2}^i(d_n, L)}{\partial d_n} \alpha^i \right)}{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)^2}$$

$$(i, k = 1, 2) \quad (27e)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(i, k)}{\partial L} =$$

$$\frac{\left( \sum_{i=0}^8 \frac{\partial q_{ik1}^i(d_n, L)}{\partial L} \alpha^i \right) \left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)}{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)^2}$$

$$\frac{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik1}^i(d_n, L) \alpha^i \right) \left( \sum_{i=0}^8 \frac{\partial q_{ik2}^i(d_n, L)}{\partial L} \alpha^i \right)}{\left( \sum_{i=0}^8 q_{ik2}^i(d_n, L) \alpha^i \right)^2}$$

$$(i, k = 1, 2) \quad (27f)$$

上述未列出的偏导矩阵均为 $\mathbf{0}$ ,从上述表达式可以看出偏导矩阵是极其复杂的。

下面结合具体的超空泡射弹试验参数计算其屈曲非概率可靠性综合指标 $\kappa'$ 。水的密度 $\rho_w = 1\ 000\text{kg/m}^3$ ,底部直径与空化器直径之比 $\alpha = 3.0$ ,不确定向量 $\mathbf{Y}$ 由下面多个超椭圆凸集合(包

括区间集合)来描述:

$$2.0 \times 10^{11} \text{ Pa} \leq E \leq 2.2 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad (28a)$$

$$\left(\frac{L-0.160}{0.005}\right)^2 + \left(\frac{d_n-0.0025}{0.0001}\right)^2 \leq 1 \quad (28b)$$

$Y' = [C_x \quad v]^T$  的超椭球凸集合为

$$\begin{cases} (Y' - Y'_0)^T W' (Y' - Y'_0) \leq 0.2 \\ Y'_0 = [1.0 \quad 1.200]^T \\ W' = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 1.0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (28c)$$

将不确定向量  $Y$  用标准化向量  $\Delta v$  表示,即

$$E = (2.1 + 0.1\Delta v_1) \times 10^{11} \quad (29a)$$

$$L = 0.160 + 0.005\Delta v_2 \quad (29b)$$

$$d_n = 0.0025 + 0.0001\Delta v_3 \quad (29c)$$

通过特征值分解可以得到对角阵  $\Lambda$  及正交阵  $\bar{P}$  为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (29d)$$

则  $Y'$  由  $\Delta v' = [\Delta v_4 \quad \Delta v_5]$  表示为

$$Y' = 0.2\bar{P}^{-1}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}(\Delta v' + 5\Lambda^{\frac{1}{2}}\bar{P}Y'_0) \quad (29e)$$

将  $\Delta v$  代入式(23)得到标准化空间中的极限状态方程。

首先采用 MLSA 在标准化空间中求解射弹屈曲非概率可靠性指标  $\eta'$ 。图 4 给出了  $\Delta v_i$ 、 $\delta_i$ 、 $\eta'$  和  $g'$  的迭代过程图。从图 4 可以看出,  $\Delta v_i$  和  $\delta_i$  均迅速收敛, 未出现明显的迂回迭代与振荡,  $g'$  也迅速收敛于 0,  $\eta'$  的迭代收敛值为 3.5513 > 1, 则  $\kappa' = \eta' = 3.5513$ 。

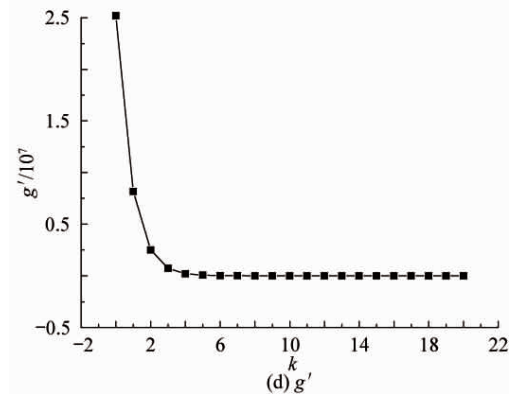
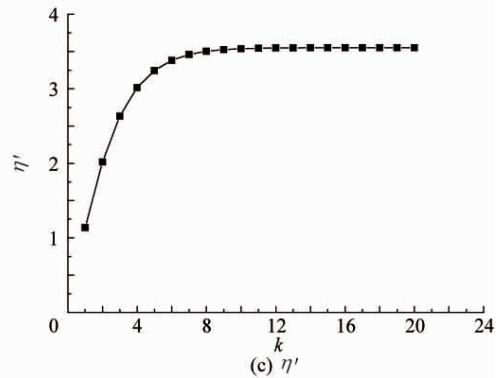
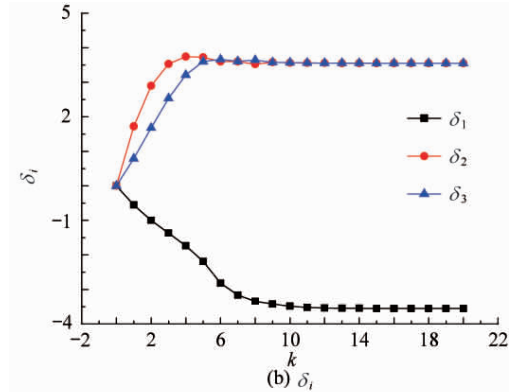
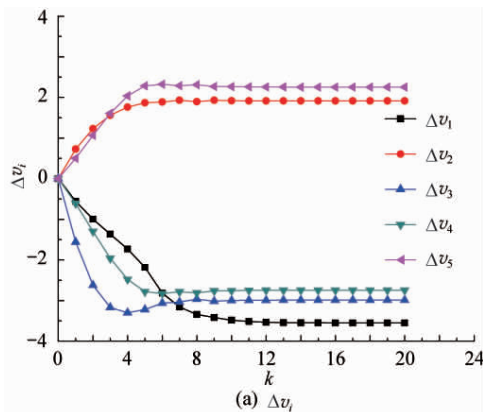


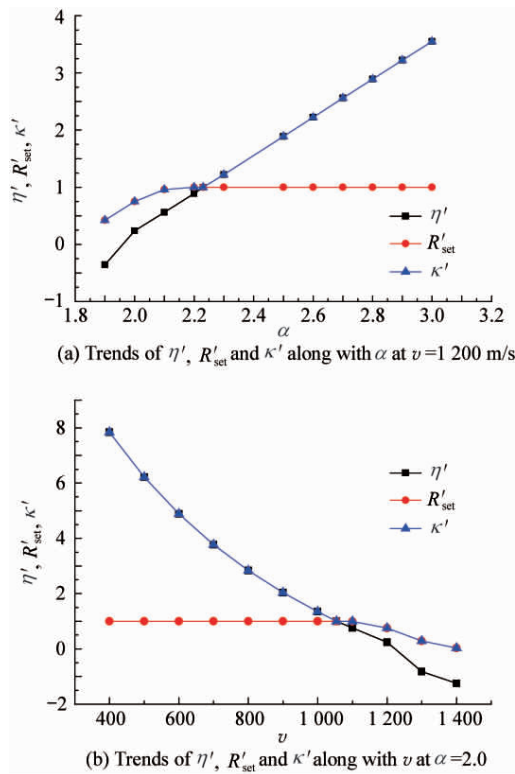
图 4  $\Delta v_i$ 、 $\delta_i$ 、 $\eta'$  和  $g'$  的迭代过程图(工程结构算例)

Fig. 4 Iterative process graphs of  $\Delta v_i$ ,  $\delta_i$ ,  $\eta'$  and  $g'$  in example of engineering structure

图 5(a)与图 5(b)分别给出了超空泡射弹结构屈曲非概率可靠性指标  $\eta'$ 、可靠度  $R'_{set}$  及综合指标  $\kappa'$  分别随射弹底部直径与空化器直径之比  $\alpha$  (速度  $v=1.200 \text{ m/s}$  时) 及速度  $v$  的名义值 ( $\alpha=2.0$  时) 的变化趋势。

从图 5 可以看出, 当  $\eta' \geq 1$  时,  $R'_{set}$  始终为 1, 无法度量结构屈曲可靠性程度; 在  $\eta' < 1$  时,  $\eta'$  无明确物理涵义。所以采用文中提出的综合指标  $\kappa'$  度量射弹结构的非概率可靠性程度较为合理。随着底部直径与空化器直径之比  $\alpha$  的增大,  $\kappa'$  呈上



图5  $\eta'$ 、 $R'_{set}$ 及 $\kappa'$ 随 $\alpha$ 及速度 $v$ 的变化Fig. 5 Trends of  $\eta'$ ,  $R'_{set}$  and  $\kappa'$  along with  $\alpha$  or  $v$ 

升趋势,且射弹结构屈曲强度增大,则结构屈曲可靠性提高;随着速度 $v$ 的增大, $\kappa'$ 呈下降趋势、空化器阻力增大,导致结构屈曲安全余量方程中应力项增大,则可靠性下降。

## 5 结论

(1) 对于失效域与超椭圆凸集合发生干涉和不干涉两种情况,综合指标均有明确的物理涵义,能够很好地对工程结构的非概率可靠性进行度量,弥补了超椭圆凸集合非概率可靠性指标 $\eta'$ 与非概率可靠度 $R'_{set}$ 各自存在的不足,并可应用于多个超椭圆凸集合描述时的情况。

(2) 通过单个超椭圆与多个区间变量两种特殊情况验证算例,证明了MLSA求解多个超椭圆凸集合描述时的非概率可靠性指标 $\eta'$ 的正确性与较好的迭代收敛性,且迭代步数少于有限步长迭代法与修正迭代法的步数。

(3) MLSA求解射弹屈曲非概率可靠性指标 $\eta'$ 时迅速收敛,未出现明显的迂回迭代与振荡,屈曲非概率可靠性综合指标 $\kappa'$ 随底部直径

与空化器直径之比 $\alpha$ 增大而增大,随速度 $v$ 增大而下降。

## 参考文献

- [1] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structure: from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. Computers and Structures, 1995, 56(6): 871-895.
- [2] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 227-245.
- [3] Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models[J]. Structural Safety, 1995, 17(2): 91-109.
- [4] 邱志平, 陈山奇, 王晓军. 结构非概率鲁棒可靠性准则 [J]. 计算力学学报, 2004, 21(1): 1-6.  
Qiu Zhiping, Chen Shanqi, Wang Xiaojun. Criterion of the non-probabilistic robust reliability for structures[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(1): 1-6. (in Chinese)
- [5] Elishakoff I. Discussion on: a non-probabilistic concept of reliability[J]. Structural Safety, 1995, 17(3): 195-199.
- [6] 吕震宙, 冯蕴雯, 岳珠峰. 改进的区间截断法及基于区间分析的非概率可靠性分析方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 260-264.  
Lu Zhenzhou, Feng Yunwen, Yue Zhufeng. A advanced interval-truncation approach and non-probabilistic reliability analysis based on interval analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(3): 260-264. (in Chinese)
- [7] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.  
Guo Shuxiang, Lu Zhenzhou, Feng Yuansheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 56-60. (in Chinese)
- [8] 曹洪钧, 段宝岩. 基于凸集合模型的非概率可靠性研究 [J]. 计算力学学报, 2005, 22(5): 546-549.  
Cao Hongjun, Duan Baoyan. An approach on the non-probabilistic reliability of structures based on uncertainty convex model[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(5): 546-549. (in Chinese)
- [9] 王晓军, 邱志平, 武哲. 结构非概率集合可靠性模型[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 641-646.  
Wang Xiaojun, Qiu Zhiping, Wu Zhe. Non-probabilistic set based model for structural reliability[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(5): 641-646. (in Chinese)
- [10] 乔心州, 仇原鹰, 孔宪光. 一种基于椭圆凸集的结构非概率可靠性模型[J]. 工程力学, 2009, 26(11): 203-208.

- Qiao Xinzhou, Qiu Yuanying, Kong Xianguang. A non-probabilistic model of structural reliability based on ellipsoidal convex model[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(11): 203-208. (in Chinese)
- [11] 江涛, 陈建军, 姜培刚, 等. 区间模型非概率可靠性指标的一维优化算法[J]. 工程力学, 2007, 24(7): 23-27.  
Jiang Tao, Chen Jianjun, Jiang Peigang, et al. A one-dimensional optimization algorithm for non-probabilistic reliability index[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(7): 23-27. (in Chinese)
- [12] 郭书祥, 张陵, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227-231.  
Guo Shuxiang, Zhang Ling, Li Ying. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(2): 227-231. (in Chinese)
- [13] 罗阳军, 亢战. 超椭球模型下结构非概率可靠性指标的迭代算法[J]. 计算力学学报, 2008, 25(6): 747-752.  
Luo Yangjun, Kang Zhan. An iteration approach for structural non-probabilistic reliability analysis based on hyper-ellipsoidal models[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(6): 747-752. (in Chinese)
- [14] Kang Z, Luo Y J. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(41-44): 3228-3238.
- [15] Luo Y J, Kang Z, Li A. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model[J]. Computer and Structures, 2009, 87(21-22): 1408-1415.
- [16] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003: 129-130.
- Gong Jinxin. Reliability calculation methods of engineering structure[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003: 129-130. (in Chinese)
- [17] 周凌. 可靠性算法与超空泡航行体结构屈曲可靠性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 2010.  
Zhou Ling. Reliability algorithms and structural buckling reliability research of supercavitating vehicle[D]. Harbin: College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, 2010. (in Chinese)
- [18] Liu P L, Der Kiureghian A. Optimization algorithms for structural reliability[J]. Structural Safety, 1991, 9(3): 161-177.
- [19] An W G, Zhou L, An H. Structure buckling and non-probabilistic reliability analysis of supercavitating vehicles[J]. Journal of Harbin Institute of Technology: New Series, 2009, 16(4): 561-569.

#### 作者简介:

周凌(1984—) 男, 博士, 助理研究员。主要研究方向: 结构非概率可靠性指标及算法。

Tel: 0431-86708827

E-mail: hszl007@163.com

安伟光(1943—) 男, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 结构系统可靠性与优化。

E-mail: anweiguang@hrbeu.edu.cn

贾宏光(1971—) 男, 博士, 研究员, 博士生导师。主要研究方向: 光机电微小化与精确制导技术研究。

E-mail: jiahg@ciomp.ac.cn

## Definition and Solution of Reliability Comprehensive Index of Super-ellipsoid Convex Set

ZHOU Ling<sup>1,\*</sup>, AN Weiguang<sup>2</sup>, JIA Hongguang<sup>1</sup>

1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*

2. *College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*

**Abstract:** Both for the cases when a failure field and a super-ellipsoid convex set interfere or don't interfere with each other, there exists insufficiency of both the super-ellipsoid convex sets non-probabilistic reliability index and non-probabilistic reliability degree index. In view of this, this paper presents a definition of reliability comprehensive index based on multi-ellipsoid convex sets by combining the above two definition indexes. The comprehensive index is calculated by the combined method of modified limit step iteration algorithm (MLSA) and the Monte-Carlo method. The modified limit step length iteration algorithm is presented based on the limit step length iteration algorithm. A new merit function is proposed based on the extreme value condition of the extensive Lagrange function. Golden section method is introduced for one dimension search of the step length and convergence is accelerated. Numerical examples show the validity of the iteration results of the multi-ellipsoid convex sets non-probabilistic reliability index obtained by MLSA, and the algorithm also exhibits better convergence. The structural buckling non-probabilistic reliability degree of a supercavitating projectile is evaluated by the super-ellipsoid convex sets reliability comprehensive index with more satisfactory results.

**Key words:** super-ellipsoid convex set; reliability comprehensive index; modified limit step length iteration algorithm; Monte-Carlo method; merit function; supercavitating projectile; buckling reliability

---

Received: 2011-03-15; Revised: 2011-04-14; Accepted: 2011-06-17; Published online: 2011-07-26 16:49

URL: [www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20110726.1649.001.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20110726.1649.001.html) DOI:CNKI:11-1929/V.20110726.1649.001

\* Corresponding author. Tel.: 0431-86708827 E-mail: [hszl007@163.com](mailto:hszl007@163.com)