

文章编号: 1007-7294(2011)07-0769-07

超空泡运动体圆柱薄壳屈曲可靠性分析

周 凌^{1,2}, 安伟光¹, 蒋运华¹, 贾宏光²

(1 哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001;

2 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033)

摘要: 在水下高速运动的超空泡运动体, 其所受轴向力非常大, 容易发生结构屈曲问题。考虑到结构自身参数的不确定性, 有必要对运动体结构进行屈曲可靠性分析。首先给出超空泡运动体圆柱薄壳舱段的受力模型, 并运用半解析有限元法得到临界屈曲载荷。然后建立圆柱薄壳舱段屈曲安全余量函数, 给出了临界屈曲载荷隐函数形式的敏度表达式, 再用有限步长迭代法求屈曲可靠性指标。最后, 通过算例分析了不同空化器锥角时的圆柱薄壳舱段屈曲可靠性指标随速度的变化趋势。

关键词: 超空泡运动体; 圆柱薄壳舱段; 半解析有限元; 有限步长迭代法; 屈曲可靠性分析

中图分类号: O342 文献标识码: A

Buckling reliability analysis of cylindrical thin shell of supercavitating vehicles

ZHOU Ling^{1,2}, AN Wei-guang¹, JIANG Yun-hua¹, JIA Hong-guang²

(1 College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2 Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: Supercavitating vehicles with high underwater velocity undergo high longitudinal force. The axial pressure can cause structure buckling problem of Supercavitating vehicles. Moreover, the indefiniteness of structural own parameters should be considered. Therefore, it is necessary to perform structure buckling reliability analysis of supercavitating vehicles. Firstly, structure force model of cylindrical thin shell compartment of supercavitating vehicles is established. And critical buckling load is obtained by semi-analytical FEM. Secondly, buckling safety margin function of cylindrical thin shell compartment is established. Sensitivity expression of critical buckling load is presented. And then structure buckling reliability index is obtained by limit step length iteration method. Finally, through numerical results, it is studied that change tendency of structure buckling reliability index of cylindrical thin shell compartment along with the variety of velocity under different cone-cavitator angles.

Key words: supercavitating vehicles; cylindrical thin shell compartment; semi-analytical FEM; limit step length iteration method; buckling reliability analysis

1 引言

超空泡减阻技术由于其潜在的军事价值已成为各国科学家研究的热点。目前已经研制成功的主要

收稿日期: 2010-07-01 修改日期: 2011-03-11

基金项目: 国防“十一五”基础科研项目(A2420061291)

作者简介: 周 凌(1984-), 男, 博士研究生; 安伟光(1943-), 男, 教授, 博士生导师。

有超空泡高速射弹和超空泡鱼雷两种超空泡运动体,第二代超空泡鱼雷的速度可以达到 200 m/s,实验用的超空泡射弹的最高速度可以达到 200 m/s^[1-2]。超空泡运动体在水下高速运动时,其前端所受的空化器阻力和尾部所受的发动机推力都很大^[3],故运动体结构在受到相当大的轴向压力后容易产生屈曲问题^[4]。而且,超空泡运动体是在水下高速运行情况下的复杂系统,特别是考虑到超空泡运动体结构自身参数的不确定性,因而有必要对超空泡运动体结构进行屈曲可靠性分析^[5]。

目前超空泡的研究主要都集中在对超空泡流体的研究上,对超空泡运动体结构方面的研究则不多。Vasin^[6]用伽辽金法给出了高速超空泡射弹的临界屈曲载荷;Ruzzeno^[7]用半解析有限元法研究了超空泡运动体加肋圆柱薄壳的动态屈曲及优化设计问题。Alyanak^[8]运用结构多学科优化方法给出了超空泡鱼雷加强肋的最佳结构形式和尺寸。杨传武等^[9]用有限元法计算了超空泡运动体在冲击载荷作用下的结构响应问题。而对超空泡运动体结构进行可靠性分析的研究较少,顾永维等^[10]将水下高速运动体简化为变截面杆,研究了其抗弯稳定可靠性问题。安伟光等^[11]研究了具有初偏心的水下高速运动弹性杆的抗弯稳定可靠性问题。

文中将半解析有限元与有限步长迭代法相结合给出了圆柱薄壳屈曲可靠性指标的计算方法,然后用该算法计算超空泡运动体圆柱薄壳舱段屈曲可靠性指标。半解析有限元具有计算自由度少,计算精度高,省时等特点^[12],这将极大地提高屈曲可靠性指标计算的效率和准确性,有限步长迭代法对于非线性程度较高的极限状态方程具有较好的收敛性。

2 超空泡运动体圆柱薄壳舱段受力分析

根据超空泡流动机制,结构与流体的接触面只有前端空化器表面。对于自然超空泡,空泡内的压力为饱和蒸气压 $p_c=2\ 350\ \text{Pa}$ (在 20 °C 时),则可以忽略其作为外压载荷对超空泡运动体的作用^[7]。所以,当超空泡运动体以图 1(a)的机制向前运行时,即尾部不与空泡壁碰撞也不滑水,则只受到前端空化器阻力和尾部发动机推力作用。图 1(a)为以速度 v 前进的超空泡运动体,其中 d_n 为空化器直径, φ 为空化器的锥角, F_D 为空化器阻力, F_p 为发动机推力。图 1(b)给出了超空泡运动体圆柱薄壳舱段结构的受力图和几何尺寸, p 为单位面积轴向压力, R 为薄壳中面半径, L 为薄壳长度, h 为薄壳厚度。

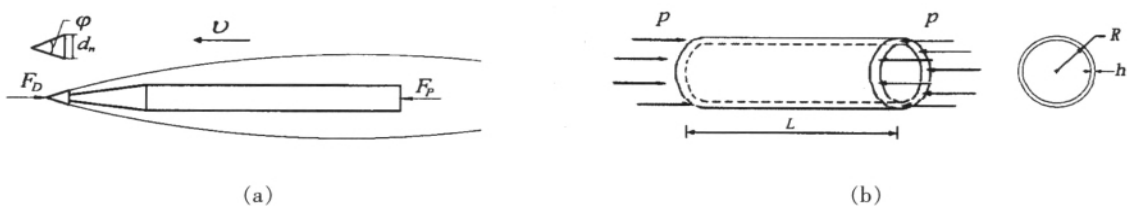


图 1 超空泡运动体圆柱薄壳舱段受力和几何尺寸示意图

Fig.1 Force model and geometry shape of cylindrical thin shell compartment of supercavitating vehicles

超空泡流动的重要参数空化数 σ 的表达式为

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_c}{\frac{1}{2} \rho_w v^2} \quad (1)$$

式中, ρ_w 为水的密度, v 为运动体速度, p_c 为空泡内压力, p_∞ 为来流无穷远处压力, $p_\infty = \rho_w g h_0 + p_0$, 其中 h_0 为运动体航行水深, p_0 为标准大气压。空化器阻力 F_D 可由下式计算:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_w v^2 A C_x(\sigma, 0) = \frac{C_x \rho_w v^2 \pi d_n^2}{8} \quad (2)$$

式中, A 为空化器截面积, d_n 为空化器直径, $C_x(\sigma, 0)$ 为零攻角时的空化器阻力系数, 其表达式为

$$C_x(\sigma, 0) = C_{x0}(1 + \sigma) \tag{3}$$

式中, C_{x0} 为 $\sigma=0$ 时的空化器阻力系数, 其表达式为^[3]

$$\begin{aligned} C_{x0} &= \varphi/360(0.915 + 9.5\varphi/360) \quad 0 < \varphi < 30^\circ \\ C_{x0} &= 0.5 + 1.81(\varphi/360 - 0.25) - 2(\varphi/360 - 0.25)^2 \quad 30^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ \\ C_{x0} &= 0.8275 + 2.25 \cdot 10^{-3}(\varphi - 180) - 7.18 \cdot 10^{-6}(\varphi - 180)^2 \quad 180^\circ < \varphi \leq 240^\circ \end{aligned} \tag{4}$$

式中, φ 为空化器锥角。当超空泡运动体以速度 v 匀速前进时, 其空化器阻力 F_D 与发动机推力 F_p 平衡, 则圆柱薄壳舱段所受的轴向压力 p 为

$$p = \frac{F_D}{2\pi R h} \tag{5}$$

3 超空泡运动体圆柱薄壳舱段屈曲可靠性算法

3.1 单元弹性与几何刚度矩阵

将柱坐标系的原点建在圆柱薄壳一端圆截面的圆心上, x 为轴向坐标, r 为径向坐标, θ 为周向坐标。根据薄壳理论, 忽略薄壳厚度方向的正应变与剪切应变, 则应变向量为 $\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{x\theta}\}^T$ 。考虑大挠度应变位移关系, 应变包括线性应变和非线性应变, 即

$$\varepsilon = \varepsilon^l + \varepsilon^{nl} \tag{6}$$

式中, ε^l 为线性应变向量, ε^{nl} 为非线性应变向量, $\varepsilon^l, \varepsilon^{nl}$ 与中面位移的关系式采用文献[13]给出的 Yamaki 关系式。当几何形状与材料性质不沿某一坐标方向变化, 则可以进行变量分离, 并在该方向上用解析函数近似代替, 从而达到降低维数和减少计算量的目的。柱壳在 θ 方向几何形状与材料性质不变化, 则可以将位移场在环向展开成傅里叶级数并进行变量分离:

$$\begin{cases} u(\theta, x) = \sum_n u(n, x) \cos n\theta \\ v(\theta, x) = \sum_n v(n, x) \sin n\theta \\ w(\theta, x) = \sum_n w(n, x) \cos n\theta \end{cases} \tag{7}$$

式中, n 为周向失稳波形的波数。在轴向用一维梁单元对圆柱薄壳进行离散, 该梁单元的单元节点位移为

$$\delta_n^e = [u_{ni} \quad v_{ni} \quad w_{ni} \quad \phi_{ni} \quad u_{nj} \quad v_{nj} \quad w_{nj} \quad \phi_{nj}]^T \tag{8}$$

式中, 下标 i, j 分别表示单元的两节点。 u_n, v_n, w_n, ϕ_n 分别表示节点的轴向、切向、径向和绕切向轴的旋转角位移。轴向和切向位移采用线性插值, 径向位移采用 Hermite 多项式插值函数, 将单元位移用节点位移表示, 代入到线性应变位移关系, 并由虚功方程可以得到单元弹性刚度矩阵为

$$k_n^e = \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^L \int_{R+h/2}^R \mathbf{B}^l(n, r, x, \theta)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^l(n, r, x, \theta) r dr dx d\theta \tag{9}$$

式中, \mathbf{D} 为弹性矩阵, $\mathbf{B}^l(n, r, x, \theta)$ 为线性应变矩阵。忽略应变能公式中的非线性应变的二次项积分, 则可由单元非线性应变能公式得到单元几何刚度矩阵的表达式为^[14]

$$k_{gn}^e = \int_0^{2\pi} \int_{R-h/2}^L \int_{R+h/2}^R \mathbf{B}^{nlT}(n, r, x, \theta) \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \mathbf{B}^{nl}(n, r, x, \theta) r dr dx d\theta \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \tag{10}$$

3.2 匀速前进超空泡运动体圆柱薄壳舱段的临界屈曲载荷

当超空泡运动体以图 1 所示的机制匀速前进时,其舱段只受轴向压力,则单元几何刚度矩阵可以表示为

$$k\mathbf{g}_n^e = -p \int_0^{2\pi} \int_0^{L'} \int_{R-h/2}^{R+h/2} \mathbf{B}^{nT}(n, r, x, \theta) \begin{bmatrix} S' & & \\ & S' & \\ & & S' \end{bmatrix} \mathbf{B}^n(n, r, x, \theta) r dr dx d\theta \quad S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

通过有限元标准步骤,将上述单元弹性和几何刚度矩阵组装成整体弹性和几何刚度矩阵,并根据边界条件,去掉刚度矩阵中与位移为零相对应的行和列,则可以得到圆柱薄壳屈曲分析的特征方程

$$(\mathbf{K}_n - p\mathbf{K}\mathbf{g}_n^e)\delta_n = 0 \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

则圆柱薄壳舱段的临界屈曲载荷 p_{cr} 为求(13)式特征值问题的最小正的特征根。

3.3 圆柱薄壳屈曲安全余量及敏度表达式

当空化器阻力超过临界屈曲载荷,即认为圆柱薄壳失稳。将临界屈曲载荷 p_{cr} 作为强度,空化器阻力 p 作为应力,则超空泡运动体圆柱薄壳舱段屈曲安全余量为

$$M = g(\mathbf{X}) = p_{cr} - p \quad (13)$$

式中, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$ 为随机向量, m 为随机变量个数, p_{cr} 与 p 均为随机变量的函数。在求可靠性指标时会用到安全余量对任一随机变量的求导,即

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial p_{cr}}{\partial X_i} - \frac{\partial p}{\partial X_i} \quad (14)$$

式中,临界屈曲载荷 p_{cr} 是隐函数形式。下面给出 p_{cr} 对各随机变量的敏度表达式,将(12)式对任一随机变量求导,并左乘 δ_n^T 后相应变换得到

$$\frac{\partial p_{cr}}{\partial X_i} = \frac{\delta_n^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial X_i} - p_{cr} \frac{\partial \mathbf{K}\mathbf{g}_n^e}{\partial X_i} \right) \delta_n}{\delta_n^T \mathbf{K}\mathbf{g}_n^e \delta_n} \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式即可得到超空泡运动体圆柱薄壳屈曲安全余量对任一随机变量的求导。

3.4 圆柱薄壳屈曲可靠性计算方法

超空泡运动体圆柱薄壳屈曲安全余量方程是非线性程度较高的极限状态方程,采用验算点法迭代会有不收敛的情况,因而采用能保证收敛、算法简单、可调节步长的有限步长迭代法^[15],其迭代公式为

$$\alpha_{X_i}^{(k+1)} = \frac{x_i^{(k)} - \mu_{X_i} - \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{x=x^{(k)}} \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left[\frac{x_j^{(k)} - \mu_{X_j} - \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial X_j} \right|_{x=x^{(k)}} \sigma_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right]^2}} \quad (16a)$$

$$\beta^{(k+1)} = - \frac{g(x^{(k)}) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{x=x^{(k)}} (\mu_{X_i} - x_i^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \alpha_{X_i}^{(k+1)} \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{x=x^{(k)}} \sigma_{X_i}} \quad (16b)$$

$$x_i^{(k+1)} = \mu_{X_i} + \beta^{(k+1)} \alpha_{X_i}^{(k+1)} \sigma_{X_i}, \quad i=1, 2, \dots, I \quad (16c)$$

式中, α_{X_i} 为灵敏度系数, β 为可靠性指标, k 为迭代循环控制量, $\lambda^{(k)}$ 为迭代步长, $x_i^{(k)}$ 为迭代验算点。

下面给出圆柱薄壳屈曲可靠性指标计算的迭代步骤:

步骤 1: 设定初始值,令 $x_i^{(0)} = \mu_{X_i}, k=0$, 并给定初始步长 $\lambda^{(0)}$ 、步长调整系数 c 、周向波数最大值 N 。

步骤 2: 将 $x^{(k)}$ 与 n 代入(12)式得最小的正解 $P_{cr}^{(k)}$ 、及其对应的特征向量 $\zeta_n^{(k)}$, 并将 n 取遍从 0 到 N , 得临界屈曲载荷 $p_{cr}^{(k)}$ 、及其对应的特征向量 $\delta_n^{(k)}$ 和周向波数 n_{min} , 将它们与验算点 $x^{(k)}$ 代入到(15)式和(14)式得到 $\partial g/\partial X_i$ 。

步骤 3: 将 $x^{(k)}$ 、 $\lambda^{(k)}$ 与 $\partial g/\partial X_i$ 代入到(16)式求得 $\alpha_{x_i}^{(k+1)}$ 、 $\beta^{(k+1)}$ 与 $x_i^{(k+1)}$ 。当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$ 时, 则执行步骤 5, 否则执行步骤 4。

步骤 4: 当 $k=0$ 时, 则令 $k=k+1$, 并执行步骤 2; 当 $k \neq 0$ 时, 若 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| > \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$, 则步长 $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / c$, 否则步长不变, 再执行步骤 2 进行迭代计算。

步骤 5: 迭代计算停止, 输出可靠性指标 $\beta^{(k+1)}$ 。

4 超空泡运动体圆柱薄壳舱段数值算例

水下高速运动的超空泡运动体, 航行深度为 10 m, 速度为 350 m/s, 水的密度为 $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 20°C 时的标准大气压为 $1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$, 饱和蒸气压 p_c 为 2 350 Pa, 空化器锥角 φ 为 180° 。超空泡运动体圆柱薄壳舱段, 其两端简支, 即切向和径向受约束。舱段结构和空化器直径的随机变量相互独立并服从正态分布, 泊松比为 0.3, 弹性模量 E 的均值与标准差为: $\mu_E = 4.3 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\sigma_E = 2.6 \times 10^9 \text{ Pa}$, 几何尺寸的随机参数为: $\mu_R = 266.5 \text{ mm}$, $\sigma_R = 0.7995 \text{ mm}$; $\mu_L = 4.0 \text{ m}$, $\sigma_L = 0.02 \text{ m}$; $\mu_h = 2.5 \text{ mm}$, $\sigma_h = 0.2 \text{ mm}$; $\mu_d = 100 \text{ mm}$, $\sigma_d = 0.7 \text{ mm}$ 。

按照前节给出的迭代步骤计算圆柱薄壳屈曲可靠性指标, 其中 N 取为 10, 舱段划分成 20 个圆柱薄壳单元, 表 1 给出了屈曲可靠性指标计算的迭代过程, 迭代 6 次就收敛表明采用有限步长迭代法计算舱段屈曲可靠性时收敛速度较快。从屈曲可靠性指标来看, 在算例给出的设计参数、速度和深度条件下, 超空泡运动体圆柱薄壳舱段的屈曲可靠度是相当高的。

表 1 有限步长法迭代过程列表

Tab.1 List of iterative process of limit step length iteration method

k	$E^{(k)}$ (10^{10} Pa)	$R^{(k)}$ (mm)	$L^{(k)}$ (m)	$h^{(k)}$ (mm)	$Dn^{(k)}$ (mm)	$\beta^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	4.300 0	266.500 00	4.000 000	2.500 0	100.000 0	—	0.01
1	3.707 0	266.437 99	4.000 409	1.997 8	100.260 4	3.425 2	0.01
2	3.850 2	266.469 12	3.999 277	1.911 3	100.242 0	3.439 0	0.01
3	3.905 6	266.438 05	4.000 369	1.964 7	100.233 2	3.101 3	0.01
4	3.891 4	266.438 00	4.000 376	1.972 7	100.234 6	3.094 9	0.01
5	3.889 1	266.437 99	4.000 375	1.973 8	100.234 9	3.094 8	0.01
6	3.888 7	266.437 99	4.000 375	1.974 0	100.234 9	3.094 8	0.01

在计算可靠性指标的每一迭代步中都要计算临界屈曲载荷 p_{cr} , 图 2(a) 给出了每一次迭代循环中屈曲载荷 p_{cr} 随周向失稳波形的波数 n 的变化情况。图 2(b) 给出了 $k=0$ 迭代循环中 p_{cr} 随 n 的变化情况, 可以看出 $n=0$ 时的 p_{cr} 值远大于 n 取其他值时 p_{cr} 的值, 因而可以省去求 $n=0$ 时的 p_{cr} 值, 这样可以减少计算量和提高迭代效率。而且 p_{cr} 随 n 的变化不是单调增长或下降变化, 而是呈波浪形变化。这对于确定 p_{cr} 带来了一定复杂性, 因而必须逐个计算 n 取不同值时的 p_{cr} , 然后对它们进行比较确定 p_{cr} 。由图 2(b) 可知在 $k=0$ 时, 取得 p_{cr} 时的 $n=3$ 。图 2(c) 给出最后四次迭代中 p_{cr} 随 n 的变化情况, 从中可以看出,

当迭代收敛时 p_{cr} 随 n 的变化趋势趋于一致,且与各个 n 值对应的 p_{cr} 值也趋于相近。从图 2(d)可以看出,在每一次迭代步中,取得 p_{cr} 的 n 值是不同的,且在迭代停止时 p_{cr} 值及其对应的 n 值也趋于收敛。

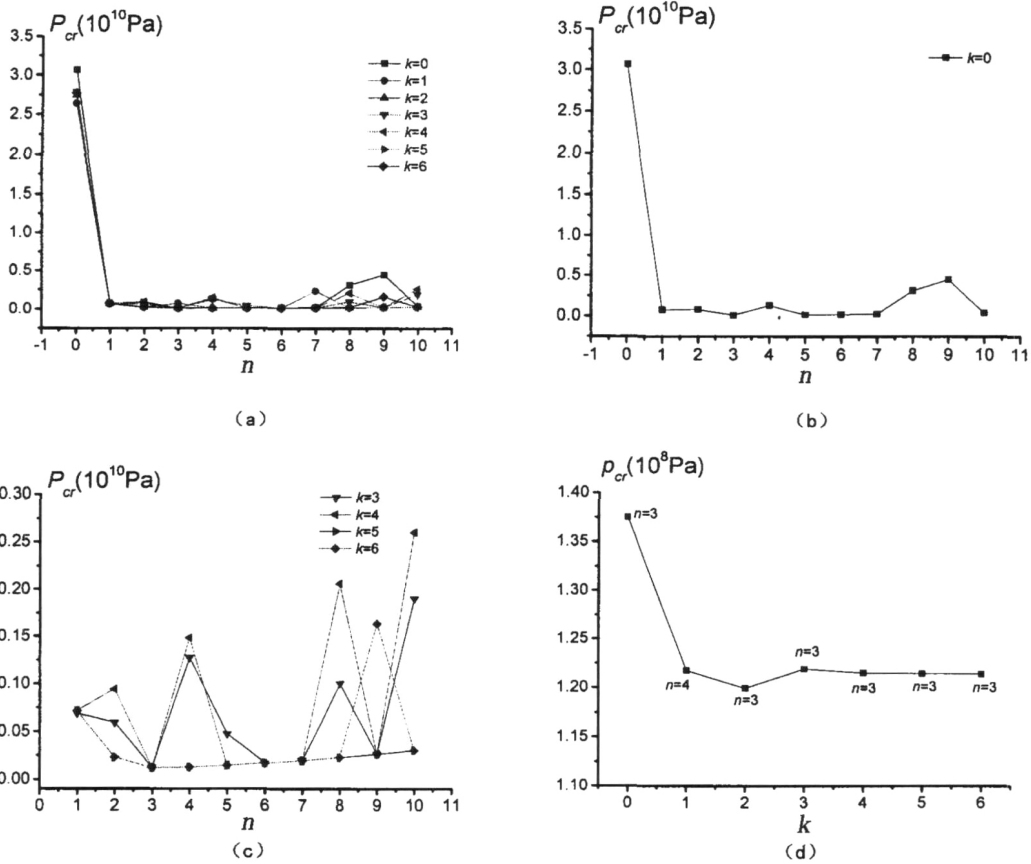


图 2 迭代过程中圆柱薄壳屈曲载荷的变化趋势

Fig.2 Trend of buckling load of cylindrical thin shell in iterative process

在上述算例的基础上,通过改变运动体的空化器锥角和运动速度,图 3 给出了空化器锥角 φ 分别为 60° 、 120° 、 180° 和 240° 时舱段屈曲可靠性指标 β 随速度的变化趋势。从图 3 可以看出,在速度为定值时,空化器锥角 φ 值越大 β 值越小。当 φ 为定值时, β 随速度的增大而减小,且呈线性下降。而且, β 从 3.0 下降到 0 对应的速度范围很窄,即速度的稍微增大就会引起 β 的迅速下降,说明屈曲可靠性指标对速度的变化很敏感,锥角 φ 值越小, β 下降的直线斜率会变小,对应的速度范围会变大。锥角 φ 值越大, β 等于 3.0 时所对应的速度越小,即圆柱薄壳舱段屈曲可靠性指标 β 进入从 3.0 迅速下降到 0 区间所对应的速度越小。我们可以将 β 等于 3.0 时所对应的速度称为临界屈曲速度,当速度小于临界屈曲速度时,圆柱薄壳舱段屈曲可靠度很高,当速度大于临界屈曲速度时,屈曲可靠度迅速下降。

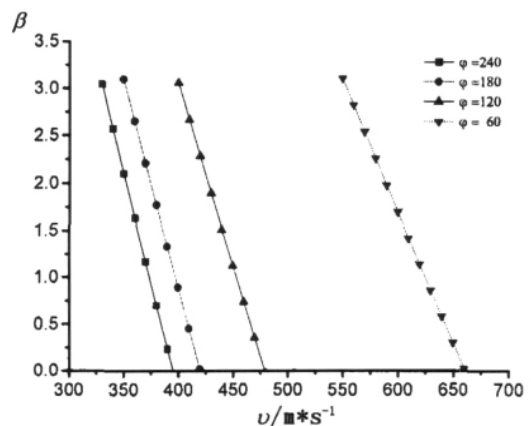


图 3 不同空化器锥角下的圆柱薄壳屈曲可靠性指标随速度变化图

Fig.3 The variety of buckling reliability index of cylindrical thin shell with velocity at different cone-cavitator angles

6 结 论

从超空泡运动体圆柱薄壳舱段结构的屈曲可靠性数值算例可以得出以下结论:

(1) 在算例给出的设计参数、运行速度和深度条件下,圆柱薄壳舱段的屈曲可靠度是相当高的。

(2) 周向失稳波数 $n=0$ 时的 P_{cr} 值远大于 n 取其他值时屈曲载荷 P_{cr} 的值,因而可以省去求 $n=0$ 时的 P_{cr} 值,这样可以减少计算量和提高迭代效率。

(3) 迭代收敛时屈曲载荷 P_{cr} 随 n 的变化趋势趋于一致,且与各个 n 值对应的屈曲载荷 P_{cr} 值也趋于相近。迭代停止时临界屈曲载荷 P_{cr} 的值以及对应的 n 值也趋于收敛。

(4) 在速度为定值时,空化器锥角 φ 值越大 β 值越小。在锥角 φ 为定值时, β 随速度的增大呈线性下降;屈曲可靠性指标 β 对速度的变化很敏感,速度的稍微增大就会引起 β 的迅速下降。锥角 φ 值越小, β 下降的直线斜率会变小,对应的速度范围会变大。

(5) 锥角 φ 值越大,屈曲可靠性指标 β 等于 3.0 时所对应的临界屈曲速度越小。当速度小于临界屈曲速度时,圆柱薄壳舱段屈曲可靠度很高,当速度大于临界屈曲速度时,屈曲可靠度迅速下降。

本文的研究为水下超空泡运动体圆柱薄壳可靠性设计提供了参考。

参 考 文 献:

- [1] 曹 伟,魏英杰,王 聪等.超空泡技术现状、问题与应用[J].力学进展,2006,36(4):571-579.
- [2] Ashley S. Warp-drive underwater[J]. Scientific American, 2001.
- [3] Semenenko V N. Dynamic processes of supercavitation and computer simulation[R]. RTO AVT Lecture Series on Supercavitating Flows, Von Karman Institute, Brussels, Belgium, 2001.
- [4] 陈铁云,沈惠申.结构的屈曲[M].上海:上海科学技术文献出版社,1993.
- [5] 安伟光,蔡荫林,陈卫东.随机结构系统可靠性分析与优化设计[M].哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005.
- [6] Vasin, A.D. Some problems of supersonic cavitation flows[C]// In: Proceeding of the 4th International Symposium on Cavitation, Pasadena CA, 20-23 June 2001, 2001.
- [7] Massimo Ruzzene. Dynamic buckling of periodically stiffened shells: Application to supercavitating vehicles[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004(41): 1039-1059.
- [8] Edward Alyanak, et al. Structural response and optimization of a supercavitating torpedo[J]. Finite Elements Analysis, 2005 (6): 563-582.
- [9] 杨传武,王安稳.冲击载荷作用下超空泡水下航行体的结构响应[J].华中科技大学学报,2008,36(7):129-132.
- [10] 顾永维,安伟光,安 海.水下高速运动体的抗弯稳定可靠性分析[J].哈尔滨工程大学学报,2008,29(7):683-686.
- [11] 安伟光,顾永维,安 海.初偏心影响下的水下高速运动体的抗弯稳定性及可靠性分析[J].兵工学报,2008,29(7):824-828.
- [12] 刘东常,赵 瑜.半解析有限元法分析环向加筋圆柱壳外压稳定性[J].工程力学,1992,9(1):104-114.
- [13] Yamaki N. Elastic stability of circular cylindrical shells[M]. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [14] Cook R D, Malkus D S, Plesha M E. Concepts and applications of finite element analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [15] 贡金鑫.工程结构可靠度计算方法[M].大连:大连理工大学出版社,2003.