

## 模态振型拟合薄镜面变形分析

陈夫林<sup>1,2</sup>, 张景旭<sup>1</sup>, 吴小霞<sup>1</sup>, 孙敬伟<sup>1,2</sup>, 丛俊峰<sup>1</sup>

- (1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033 ;
2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要:** 波前重构是主动光学的关键技术之一, 分析了薄镜面的自由谐振模态振型的特点, 以其为基底函数, 拟合了薄镜面主镜的变形。首先, 用有限元方法给出了主镜的前 10 阶模态振型图, 把它们 RMS 值归一化为 1 000 nm, 对比分析了主镜模态振型和 Zernike 多项式在圆域内的径向变特点。利用模态振型在环域内的正交性和完备性, 采用最小二乘法拟合主镜变形, 并与环域内的 Zernike 多项式拟合结果做了对比。分析结果表明, 自由模式可以拟合波前变形, 采用相同项数拟合主镜变形时, 模态振型拟合主镜变形可以获得更小的残余误差。

**关键词:** 波前重构; 薄镜面; 模态振型; Zernike 多项式; 有限元; 最小二乘法

**中图分类号:** TH751    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1007-2276(2011)11-2238-06

## Deformation of thin primary mirror fitted with its vibration mode

Chen Fulin<sup>1,2</sup>, Zhang Jingxu<sup>1</sup>, Wu Xiaoxia<sup>1</sup>, Sun Jingwei<sup>1,2</sup>, Cong Junfeng<sup>1</sup>

- (1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** Wavefront reconstruction is one of the key technologies in active optics. The thin primary mirror deformation was fitted with its free vibration mode shape to reconstruct the wavefront. Firstly, the first ten vibration mode shapes of the thin primary mirror were given by finite element method, their RMS values were normalized to 1 000 nm on its circular area, the characteristics of the radial functions of vibration mode were compared with Zernike circular polynomials, then their orthogonality and entireness were used to fit its deformation with least square method, also the fitting results were compared with Zernike annular polynomials. Analysis results show that the free vibration mode shapes could be used to describe the wavefront, and minimum remnant aberration could be achieved by using vibration mode to fit primary deformation when using the same amount of sets.

**Key words:** wavefront reconstruction; thin primary mirror; vibration mode; Zernike polynomials; finite element method(FEM); least-square method

收稿日期: 2011-03-04; 修订日期: 2011-04-03

基金项目: 中国科学院三期创新项目; 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所创新重点支撑项目

作者简介: 陈夫林(1985-), 男, 硕博连读生, 主要从事望远镜薄镜面主镜支撑方面的研究工作。Email: ocean\_fulin@hotmail.com

导师简介: 张景旭(1965-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事大型光电望远镜结构总体技术方面的研究。Email: Zhangjx@ciomp.ac.cn

### 0 引言

波面重构技术是主动光学中主动校正力求解的关键技术之一,包括波前拟合和波前重构<sup>[1]</sup>。薄镜面主动光学常用的波面拟合底基函数分为两种:一种模式侧重光学像质表达,如 Zernike 多项式;另一种模式侧重机械结构特性,如主镜的自由谐振模式。主动光学试验中,用 Zernike 多项式拟合薄镜面主镜变形的由来已久,前人也做过不少研究:中国科学院长春光学精密机械物理研究所在直径为 400 mm 主动光学试验中就使用 Zernike 多项式拟合波面变形,苏州大学在进行 500 mm 主动光学试验时也采用 Zernike 多项式拟合主镜变形<sup>[2-7]</sup>;而自由谐振多项式拟合主镜变形则是欧洲南方天文台(ESO)在 20 世纪 90 年代提出的新方法<sup>[6]</sup>,他们在对 VLT 的主镜进行动力学分析时发现,主镜的自由谐振动模式与通常的光学波前的像差模式十分相像,提出用主镜本身的自由谐振动模式拟合波前误差,并用来做主动改正,成功应用于 VLT 望远镜。

文中根据薄镜面主镜自由谐振的微分方程,结合工程实际给出了薄镜面主镜振动的前 10 阶模态振型图,对比分析了自由谐振模式与 Zernike 多项式的在圆域内径向变化的特点。采用模态振型和环域内的 Zernike 多项式分别拟合有限元分析得到的主镜变形,给出了拟合结果及残差,最后指出了采用模态振型拟合主镜变形的优点以及使用的局限性。

### 1 自由谐振模式

当主镜的径厚比(2r/h)很大,且主镜的厚度与主镜曲率半径相比(h/R)很小时,在分析其变形时就可以把主镜模型简化为薄壳模型。

ESO 的 L. Neothe 博士在对 VLT 的望远镜主镜进行动力学分析时,给出了描述薄镜面主镜自由谐振模式的微分方程<sup>[8-9]</sup>:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 1/R \nabla^2 F - 2\zeta w = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Eh/R \nabla^2 w = 0 \tag{2}$$

式中: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  为主镜刚度, $E$  为弹性模量, $h$  为

厚度, $\nu$  为泊松比; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  为微分

算子, $R$  为主镜曲率半径; $\zeta = \frac{1}{2} h \rho \omega^2$ ,  $\rho$  为主镜密度, $\omega$  为主镜谐振频率。

方程解的形式为:

$$w(r, \varphi) = \Psi_n(r) \cos(n\varphi) \tag{3}$$

$$F(r, \varphi) = F_n(r) \cos(n\varphi) \tag{4}$$

式中: $w(r, \varphi)$  为主镜变形; $F(r, \varphi)$  为主镜应力函数; $n$  为旋转对称数; $\Psi_n(r)$  为模态振型的幅值,是关于 Bessel 方程的函数。L. Neothe 博士给出了自由谐振振型在圆域和环域内的正交特性和完备性的严格证明;同时,自由谐振模式振型也具有旋转对称性,即坐标轴沿原点转动形式保持不变,仅引起幅角变化。

结合工程实际给出材料为 K9 玻璃的主镜模型的参数:直径  $2r=620$  mm,中心孔直径  $2r_0=170$  mm,厚度  $h=18$  mm,曲率半径  $SR=2\ 841.2$  mm,弹性模量  $E=90\ 600$  MPa,泊松比  $\nu=0.26$ ,密度  $\rho=2.53 \times 10^{-9}$  t/mm<sup>3</sup>。

借助于有限元方法,图 1 给出了主镜面自由振动前 10 阶的模态振型,按振型由低到高排列。可以看出:主镜的自由谐振动模式与通常光学检测中使用的 Zernike 多项式像差模式十分相像,为了便于比较,模态振型也采用  $Z(m, n)$  的形式表示, $m$  为径向变化数, $n$  为旋转对称数。模态振型阶数越高,谐振频率也越高,描述的形状也就越复杂。根据其环域内

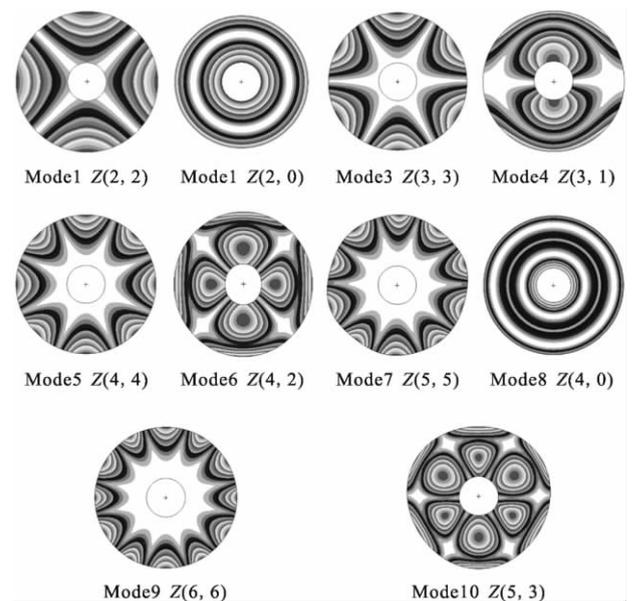


图 1 有限元方法得到的薄镜面主镜的模态振型图

Fig.1 Views of the first ten vibration modes of the thin primary mirror by FEM

的正交性和完备性,如果从最低阶项开始选取,取的项数足够的话,就可以像 Zernike 多项式一样,作为底基函数描述光学波前误差。

## 2 自由谐振模式与 Zernike 多项式对比

为了分析模态振型圆域内的变化特点,并与 Zernike 多项式做比较,选取圆域内一条最能代表主镜变化趋势的曲线来观察其径向变化。为便于分析,首先将主镜变形的 RMS 值归一化为 1 000 nm,然后将它们的径向变化曲线统一归化到单位圆内。为不失一般性,对比了旋转对称数为 0,1,2,3 时,最低三阶 Zernike 多项式(实线)和模态振型(虚线)的径向变化函数曲线,如图 2(a)~(d)所示。其中,横坐标是半径归一

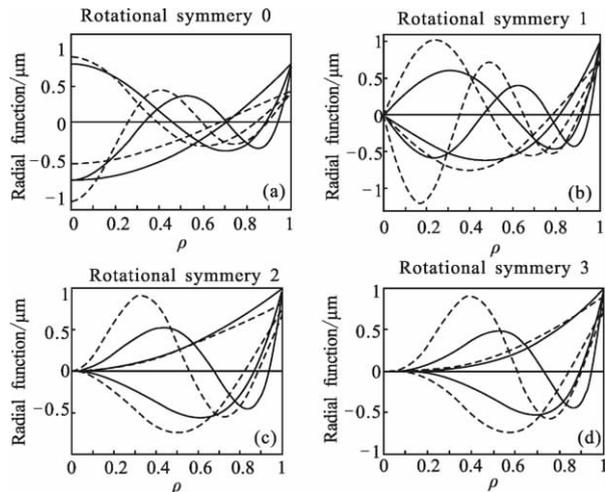


图 2 半径归一化后,不同旋转对称性最低的三阶模态振型与 Zernike 多项式的数值比较

Fig.2 Lowest three normal modes of different rotational symmetries and corresponding Zernike polynomials as functions of the normalized radius

化后的值,无单位;纵坐标是两者的特征曲线,单位为  $\mu\text{m}$ 。其中, $Z(0,0)$  平移和  $Z(1,1)$  倾斜项对应主镜的刚体模态振型,其径向变化曲线为直线,不予考虑。

数据图形以及相应的计算表明:模态振型模式和 Zernike 多项式形状上存在一定的关联, $n$  和  $m$  的变化也呈现出相同的变化规律。在分析对比了相应的数值之后发现:模态振型径向变化曲线与 Zernike 多项式相比,在内部变化梯度大,边缘处则比较平缓。所有的自由谐振模式的形心位置位于主镜中心;Zernike 多项式的形心位置随模式的不同而不同。自由谐振模态振型在孔径边缘的二阶导数为

零,即将主镜按自由谐振模式变形,在边缘处没有弯矩,其外边缘的截面轮廓是直线。Zernike 多项式的边缘存在弯矩作用,即在主镜上要产生 Zernike 多项式的模式变形,需要更大的力,这是因为 Zernike 多项式在孔径的外边缘的二阶导数不为零,即存在弯矩作用。

## 3 波面拟合

### 3.1 主镜变形分析

图 3 为带中心孔镜面主镜变形剖面示意图。主镜在重力以及其他因素作用下发生变形,简化为薄壳模型,用主镜中性面的位移代表主镜的变形,主镜中性面的曲率半径为  $SR$ , $P$  点变形到  $P'$  点,变形量为  $\vec{\delta}$ 。

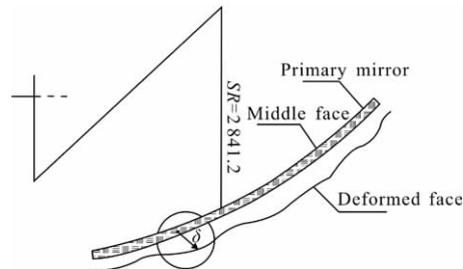


图 3 带中心孔主镜变形剖面示意图

Fig.3 Cut through a shell primary mirror with a central hole

图 4 为图 3 的局部放大示意,可以将  $\vec{\delta}$  分解为 3 个方向的变形,  $\vec{\delta}=\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}$ ,为主镜垂直于中性面的变形,  $\vec{u}$  为沿主镜中性面方向的变形,方向平行于中性面,  $\vec{v}$  为沿主镜圆周方向的变形,垂直于剖面方向。显然,  $\vec{u}$  和  $\vec{v}$  与主镜的面型无关,笔者只计算主镜垂直于中性面的变形  $\vec{w}$ 。

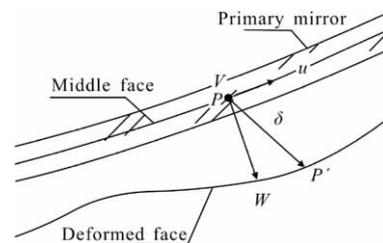


图 4 主镜变形放大示意图

Fig.4 Magnified sketch map of primary deformation

### 3.2 波面拟合方法

各模态振型相互正交,组成了以主镜镜面为区域的一组正交向量的底基,可以采用主镜的镜面模态振型拟合主镜的变形。为了使用方便,将主镜前 10 阶模

态振型的 RMS 值归一化为 1000nm,用来拟合主镜变形。用  $\Psi_k$  代表镜面节点的模态振型,在极坐标内很容易将镜面节点位移分解成振型向量的线性组合<sup>[5-6]</sup>:

$$w(r, \theta) = \sum_{k=1}^N a_k \Psi_k(r, \varphi) \quad (5)$$

式中: $a_k$  为镜面变形  $w(r, \theta)$  在基底向量  $\Psi_k(r, \varphi)$  的系数,根据模态振型的正交性:

$$a_k = \frac{1}{S} \iint_S \Psi_k(r, \varphi) w(r, \theta) dr d\varphi \quad (6)$$

式中: $S$  代表镜面区域,由于  $\Psi_k(r, \varphi)$  的解析值很复杂,通常采用数值拟合方法求系数  $a_k$ ,过程如下:在主镜面上选取  $N$  个节点,采用有限元方法计算出镜面上这些点的模态振型向量值,取模态振型的前  $M$  项,要求主镜上的节点满足  $N > M$ ,组成模态振型矩阵:

$$\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N] \quad (7)$$

有限元分析获取变形镜面的节点位移值  $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$ ,拟合方式的定义写为:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{M1} \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{M2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{1N} & \Psi_{2N} & \dots & \Psi_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

采用最小二乘法求解系数为:

$$a = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T w \quad (9)$$

### 3.3 波面拟合对比

为了验证模态振型的拟合能力,采用模态振型拟合主镜的变形。因为笔者定标的主镜的前 10 阶模态振型也是左右对称的,结合主镜的结构左右对称以及支撑结构的左右对称性,其变形也左右对称,所以采用左右对称的模态振型拟合主镜的镜面变形是合理的。

图 5 为主镜变形的有限元分析结果,图 6 为主镜变形的三维图,主镜镜面的 RMS 值为 691.05 nm, PV 值为 4 065.3 nm,采用上述的拟合方法,分别采用主镜的前 10 阶模态振型和与之相对应的环境内的 Zernike 多项式拟合。表 1 给出了各项拟合系数以及残余误差,其中模态振型的系数为 RMS 值归一化为 1 000 nm 后的值。 $Z(0,0)$  和  $Z(1,1)$  分别为 Zernike 多项式表示的光学像差的平移项和倾斜项,对应于主镜的刚体模态振型。某些系数符号相反仅代表模态振型的振动方向与 Zernike 多项式代表的光学像差偏离主镜位置的方向相反。图 7 为采用模态振型和

Zernike 多项式的拟合结果,图 8 为了两者拟合后的残差。

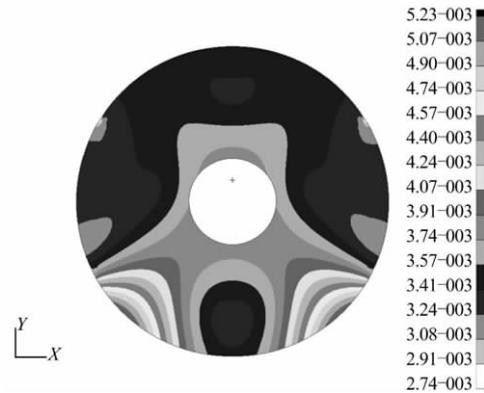


图 5 有限元分析主镜变形

Fig.5 Primary mirror deformation by FEM

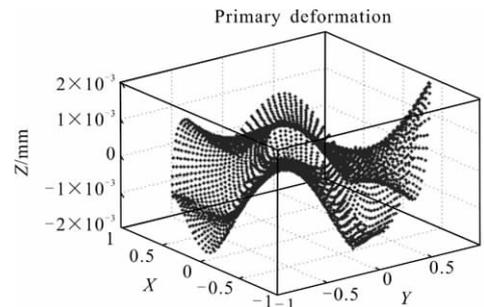


图 6 主镜变形三维图

Fig.6 Primary mirror 3D deformation

表 1 主镜变形分解系数

Tab.1 Decomposed coefficients of the deformation

	Coefficient mode	Vibration mode	Zernike( $10^{-3}$ )
	$Z(0,0)$	-0.159 8	0.051 7
	$Z(1,1)$	-0.425 5	-0.484 5
	$Z(2,2)$	0.202 5	0.224 1
	$Z(2,0)$	-0.079 4	0.049 5
	$Z(3,3)$	0.301 0	0.355 2
	$Z(3,1)$	-0.170 8	0.150 3
	$Z(4,4)$	0.482 1	0.488 0
	$Z(4,2)$	-0.015 4	-0.005 1
	$Z(5,5)$	0.104 4	0.110 0
	$Z(4,0)$	0.223 7	0.147 2
	$Z(6,6)$	0.116 0	0.074 7
	$Z(5,3)$	-0.176 2	0.147 6
Result	RMS/ nm	674.565	656.66
	PV/ nm	3 840.40	4 334.43
Residual	RMS/ nm	150.018	215.271
	PV/ nm	1 195.11	1 385.52

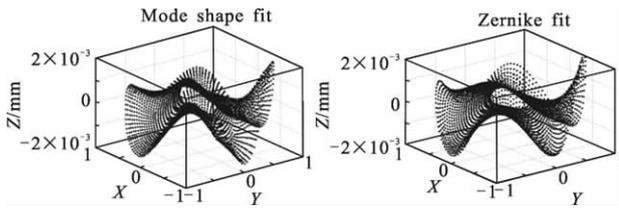


图 7 模态振型和 Zernike 多项式拟合的主镜变形

Fig.7 Deformation fitted by vibration mode and Zernike polynomials

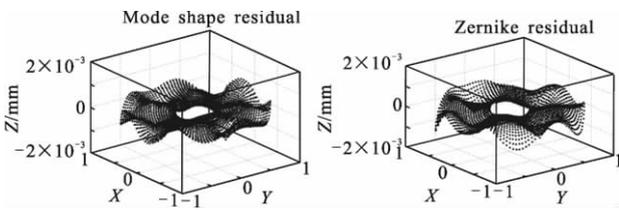


图 8 模态振型和 Zernike 多项式拟合后的残差

Fig.8 Residual after fitted by vibration mode and Zernike polynomials

分析表 1 数据可以看出, 采用相同项的模态振型和 Zernike 多项式拟合主镜变形, 模态振型多项式拟合的 RMS 和 PV 值比 Zernike 多项式值更接近主镜的变形值, 残差 RMS 和 PV 值也更小。

为了使分析更具有一般性, 针对此薄镜面的支撑机构, 以  $15^\circ$  为一个间隔, 分析了主镜从水平放置 ( $\theta=0^\circ$ ) 到竖直放置 ( $\theta=90^\circ$ ) 的镜面 RMS 变化规律, 用主镜前 10 阶模态振型拟合主镜变形, 并采用相应的 Zernike 多项式拟合主镜的变形作为对比。图 9 给出了拟合面型 RMS 值的对比结果。表 2 给出了主镜水平和竖直放置时拟合的对比结果, 及相应的拟合残差。

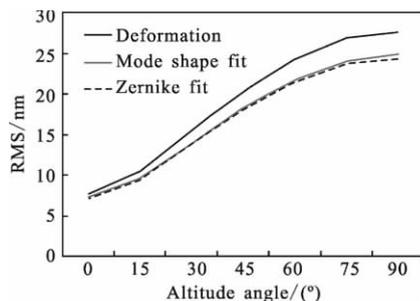


图 9 模态振型与 Zernike 多项式拟合主镜变形

Fig.9 Primary mirror deformation fitted by vibration mode and Zernike polynomials

从图 9 和表 2 的数据可知: 采用模态振型拟合的主镜变形结果与 Zernike 拟合主镜变形一致。模态

振型可以作为描述主镜变形的底基函数拟合主镜变形, 采用相同项拟合主镜变形时, 模态振型拟合的主镜变形少, 得到的残余误差也小。原因是自由模态振型的求解是通过解描述薄镜面的自由振动偏微分方程得到的, 通过施加边界条件, 与主镜的参数相关, 其振型曲线代表了镜面的变形趋势, 更符合薄镜面主镜的变形特性。Zernike 多项式描述光学成像像差, 单位圆内方差为 1, 与薄镜面结构的变形特性无关。主动光学技术中常利用模态振型采用模式定标方法求解的主动光学中镜面变形的校正力<sup>[7,9]</sup>。

表 2 主镜变形采用模态振型和 Zernike 多项式的拟合结果

Tab.2 Deformation fitted by vibration modes and Zernike annular polynomials

Measure/nm	$\theta=0^\circ$		$\theta=90^\circ$		
	RMS	PV	RMS	PV	
Deformation	7.70	29.07	27.96	248.62	
Mode shape	fitted	7.32	26.45	24.97	217.27
	residual	2.39	15.53	12.60	139.97
Zernike	fitted	7.09	30.74	24.64	166.12
	residual	2.99	16.60	13.22	148.17

模态振型拟合主镜变形应用的局限性在于圆形薄板模态振型函数  $u_n(r)$  与圆形薄板的参数相关, 数值解形式复杂, 也不具有统一形式, 归一化过程计算过程也比较复杂, 通常用模态振型模式定标时采用有限元方法。

## 4 结论

模态振型可以作为描述主镜变形的底基函数拟合主镜变形, 采用相同项拟合主镜变形时, 拟合精度比 Zernike 多项式的高, 得到的残余误差也更小。此外, 针对大望远镜可能应用的六角形和环形主镜, 也可以采用模态振型法拟合其主镜变形。

## 参考文献:

- [1] Ray F B. Active optics technology-an overview[C]//SPIE, 1991, 1532: 188-206.
- [2] Li Hongzhuang, Lin Xudong, Liu Xingyue, et al. Experiment system of 400 mm thin mirror active optics[J]. *Optics Precision*

- Eng*, 2009, 17(9): 2077–2083. (in Chinese)
- 李宏壮, 林旭东, 刘欣悦, 等. 400 mm 薄镜面主动光学实验系统[J]. *光学精密工程*, 2009, 17(9): 2077–2083.
- [3] Zeng Chunmei, Guo Peiji, Yu Jingchi, et al. Deformation and analysis on correction of 0.5 m ultra-thin mirror with active supports [J]. *Optics Precision Eng*, 2010, 18 (3): 570–578. (in Chinese)
- 曾春梅, 郭培基, 余景池, 等. 0.5 m 超薄镜主动支撑面形校正及实验[J]. *光学精密工程*, 2010, 18(3): 570–578.
- [4] Hou Xi, Wu Fan, Yang Li, et al. Wavefront fitting with Zernike annular polynomial for circular and annular pupils [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2006, 35(5): 523–526. (in Chinese)
- 侯溪, 伍凡, 杨力, 等. 基于 Zernike 环多项式的环孔径波面拟合方法[J]. *红外与激光工程*, 2006, 35(5): 523–526.
- [5] Liu Ke, Li Yanqiu, Liu Jingfeng, et al. Wavefront fitting method for annular interferogram with obscurations [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37 (5): 778–794. (in Chinese)
- 刘克, 李艳秋, 刘景峰, 等. 带有分割遮拦环形干涉图的波面拟合[J]. *红外与激光工程*, 2008, 37(5): 778–794.
- [6] Shan Baozhong, Wang Suyan, Niu Hanben, et al. Zernike polynomial fitting method and its application[J]. *Optics Precision Eng*, 2002, 10(3): 318–323. (in Chinese)
- 单宝忠, 王淑岩, 牛憨笨, 等. Zernike 多项式拟合方法及应用[J]. *光学精密工程*, 2002, 10(3): 318–323.
- [7] Cheng Shaoyuan, Cao Shaoliang, Hu Lifa, et al. Measurement of wavefront aberrations of the human eyes with Shack-Hartmann wavefront sensor[J]. *Optics Precision Eng*, 2010, 18(5): 1060–1067. (in Chinese)
- 程少园, 曹召良, 胡立发, 等. 用夏克-哈特曼探测器测量人眼波像差[J]. *光学精密工程*, 2010, 18(5): 1060–1067.
- [8] Neothe L. Use of minimum-energy modes for modal active optics corrections of thin meniscus mirrors [J]. *Journal of Modern Optics*, 1991, 38(6): 1043–1066.
- [9] Schipan P, Perott F, Marty L. Active optics correction force for the VST 2.6 m primary mirror [C]// SPIE, 2006, 6273: 62733A–1–1.

## 下期预览

# 脉冲激光测距机相对增益曲线测试方法

韩福利<sup>1</sup>, 曾嫦娥<sup>2</sup>

(1. 中国白城兵器试验中心, 吉林 白城 137001; 2. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094)

**摘要:** 脉冲激光测距机为了抑制近距离大气后向散射对测距的干扰, 采用时间程序增益(TPG)控制电路使测距机接收系统的增益随目标距离即回波时间变化, 相对增益就是不同距离上的增益与最大增益的比值。相对增益曲线对运动小目标测距的影响十分明显, 合理控制增益曲线是测距机设计中考虑的重要因素。相对增益曲线测量是由光电转换、距离设置、模拟回波激光器和准确标定的连续可调衰减片等部件构成的模拟测距回路实现的。在设置的每个目标距离上, 调整衰减片使测距机达到临界测距状态, 再用与回波距离对应的衰减值序列计算并拟合出相对增益曲线。对多台测距机的实际测试结果表明, 该方法是在整机状态下用接近实际测距的方式测量相对增益曲线的科学可行的方法。