

采用波前测量图像恢复技术的误差分析

赵金宇

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

摘要: 与自适应成像相比, 基于波前测量的图像恢复方法避开了复杂的变形镜制造和控制技术, 是一种低成本、性价比高的克服大气湍流、获取清晰图像的技术。利用测量得到的波前瞬时光学传递函数和退化的短曝光目标图像数据进行解卷积运算, 得到理想清晰的目标图像。波前探测器的测量误差和波前重构误差是影响图像恢复效果的关键因素, 利用傅里叶光学和夏克-哈特曼的原理推导了波前探测的各种误差分配关系, 并给出了大气相干常数在 5~30 cm, Zernike 多项式阶数取 11~88 之间的误差量级, 为合理选用波前探测器进行图像恢复提供了依据。

关键词: 波前测量; 图像恢复; 夏克-哈特曼

中图分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1007-2276(2011)09-1806-06

Error analysis of image deconvolution from wave-front sensing

Zhao Jinyu

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: Compared with the technique of adaptive optics, image restoration from wave-front sensing does not adopt complicated fabrication and control technology of deformable mirror. It is a low cost and high performance-price ratio method that can overcome atmosphere turbulence and get optimal image. By the method, images can be deconvolved according to instantaneous optical transfer function and a set of short-exposure degraded images. Measurement errors of the wave-front sensors and wave-front reconstruction errors are key factors for image restoration. Error distribution of wave-front measurement was obtained based on the principle of Fourier optics and Shack-Hartmann sensing. The estimation error was given with atmosphere coherent constant r_0 between 5 cm and 30 cm and Zernike polynomial factor between 11 and 88. It gives a basis for restoring images by selecting appropriate wave-front sensor.

Key words: wave-front measurement; image restoration; Shack-Hartmann

收稿日期: 2011-01-11; 修订日期: 2011-02-21

基金项目: 国家 863 计划(2009AA8080603)

作者简介: 赵金宇(1976-), 男, 副研究员, 博士, 主要从事地基空间目标光电探测领域软件、图像处理及相关工作。

Email: zhaojy@ciomp.ac.cn

0 引言

高分辨率地基成像望远镜的性能受到大气扰动的限制,无论口径多大,光学分辨率的极限是1"量级。为满足成像要求,望远镜具备对动目标的精密跟踪能力,保证动目标的相对静止。在被观测目标反射的光波传输过程中,扰动的大气在波前引起了空间和时间的波动,进而使得图像产生了严重退化。自适应技术能够实时补偿大气的扰动,是目前较为成熟的技术,然而,自适应系统复杂,成本昂贵,校正的效果因观测条件、观测目标和系统本身性能不同存在很大的差异,且自适应技术校正的只是部分频率分量,校正后的图像仍需要进行事后图像处理^[1]。

结合自适应的事后图像处理方法,即基于波前测量的解卷积技术是很现实的一种技术^[2]。在经过大气扰动的短曝光图像中包含着较高的空间频率信息,在采集一系列退化的短曝光图像过程中,波前探测器与入瞳共轭以得到采集图像时刻对应的波前,进而评估得到瞬时的光学传递函数(包括大气扰动)。由于扰动的时变特性,每个采集图像上失去的空间频率各不相同,这样,目标的整个频谱能从足够大的短曝光图像和对应的波前中恢复出来。

1 非相干光学成像原理

光学系统的成像过程是两次傅里叶变换的过程。第一次傅里叶变换是在物面和出射光瞳之间进行,在出射光瞳上形成物体的傅里叶变换空间频谱,第二次傅里叶变换是在出射光瞳和像面之间进行,在像面上形成的像是出射光瞳处的物体空间频谱的傅里叶变换。

考虑经过大气扰动传输,由光学系统成像的理想目标为 o ;短曝光图像序列记为 i_i ;与短曝光图像对应的包括大气的光学传递函数,可以由点扩散函数 h_i 描述。假定 h_i 与图像上的位置无关,这个假设只在有限的视场内成立,称为等晕区,对于可见波段,等晕区大约是几个角秒。根据光学成像原理^[3],采集的图像是理想目标和点扩散函数的卷积,如公式(1)所示。

$$i_i(x,y)=o(x,y)*h_i(x,y) \quad (1)$$

式中: (x,y) 是像面的坐标;*是二维卷积,将公式(1)两边进行傅里叶变换,则频域的表达式为:

$$I_i(u,v)=O(u,v)H_i(u,v) \quad (2)$$

式中: (u,v) 是空间频率坐标; $H_i(u,v)$ 为采集图像序列对应时刻的光学传递函数。由公式(2)可以看出,如果 $H_i(u,v)$ 已知时,可以直接解算出 $O(u,v)$,但要保证 $H_i(u,v)$ 不等于零。对公式(2)进行改进,取系列 $\{I_i, H_i\}, i=1, \dots, M$ 。

$$O_e = \frac{\langle I_i H_i^* \rangle}{\langle H_i H_i^* \rangle} \quad (3)$$

式中: O_e 是理想目标的估计; $\langle \cdot \rangle$ 是对 M 个记录取平均;*代表共轭矩阵。

当 M 接近无穷,分母等于与大气相关的散斑传递函数。该函数能由下式近似可得^[4]:

$$\langle |H_i|^2 \rangle = \langle H_i \rangle^2 + 0.342(r_0/D)^2 T_0 \quad (4)$$

式中: T_0 是望远镜的理想光学传递函数; r_0 是Fried参数; D 是望远镜口径; $\langle H_i \rangle$ 是长曝光的光学传递函数。

从公式(4)可以看到, O_e 的计算总是可能的,如果 M 足够大,在小于截止频率的情况下,分母不会得零。 O_e 也可以通过对评价函数 E 进行最小化统计^[4]得到:

$$E = \overline{\langle |O_e H_i - I_i|^2 \rangle} \quad (5)$$

上划线表示空间频率的平均。

2 瞬时传函的估计和误差影响

光学传递函数是两个错开的光瞳函数相互重叠面积的归一化。利用波前的实时信息估计对应时刻的光学传递函数为:

$$H_i(u,v) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) p(x-\lambda fu, y-\lambda fv) \cdot \exp\{i[\Phi_i(x,y) - \Phi_i(x-\lambda fu, y-\lambda fv)]\} dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} |p(x,y)|^2 dx dy} \quad (6)$$

式中: (u,v) 是空间频率; (x,y) 是光瞳坐标; f 是焦距; λ 是入射光的波长; $p(x,y)$ 是望远镜的光瞳函数; Φ_i 是由波前探测器测量斜率重构得到的瞬时相位。估计的相位精度受到波前探测器的斜率测量精度和噪声的影响。

夏克-哈特曼(HS)波前传感器是一种广泛应用于自适应系统的波前探测器。主要由微透镜阵列、匹

配透镜、CCD 相机等组成，通过与光学系统出瞳共轭的微透镜阵列采集波前，每一个微透镜定义了一个子孔径并得到一部分波前。在微透镜的焦平面上，图像点被偏移，偏移量和波前的局部斜率成比例，同时，这些偏移点的阵列由 CCD 记录。

偏移量通过质心算法计算，公式(7)给出了每个子孔径图像质心一个方向计算：

$$x_c = \frac{\sum x_i s_i}{\sum s_i} \tag{7}$$

式中： x_i 是 CCD 像素点的横轴方向坐标； s_i 是对应像素点目标的信号强度。忽略子孔径的闪烁效应，利用傅里叶变换的性质和瑞利定理，质心坐标的连续积分形式为：

$$x_c = \frac{f}{A_0} \iint \frac{\partial \Phi}{\partial u} dudv \tag{8}$$

式中： A_0 是子孔径的面积； f 是微透镜的焦距。上式是由哈特曼测量出的子孔径内波前斜率的平均值。

2.1 波前测量的动态范围

假定由 HS 定义的子孔径为圆形，由每个子孔径截取的空间相位可以由 Zernike 多项式表示：

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j \tag{9}$$

$$\overline{\partial \Phi / \partial u} = 2/d \overline{\partial \Phi / \partial u'} = 2/d \sum_{j=2}^{\infty} a_j \overline{\partial z_j / \partial u'} \tag{10}$$

式中： d 是光瞳直径； u' 是归一化的光瞳坐标；上划线表示求平均。

Zernike 多项式的导数可以表示为线性的 Zernike 多项式组合：

$$\partial z_j / \partial u' = \sum_k \gamma_{kj}^u z_k \quad k < j \tag{11}$$

则归一化的波前平均斜率为：

$$\overline{\partial \Phi / \partial u'} = \sum_{j=2}^{\infty} a_j \sum_k \gamma_{kj}^u z_k \tag{12}$$

由 Zernike 多项式的性质可得：

$$\begin{aligned} \overline{z_k} &= 0 & (k \neq 1) \\ \overline{z_1} &= 1 & (\text{piston mode}) \end{aligned} \tag{13}$$

按参考文献[5]可知，

$$\gamma_{1j}^u = [2(n+1)]^{1/2} \tag{14}$$

则

$$\overline{\partial \Phi / \partial u'} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} [2(n+1)]^{1/2} \tag{15}$$

平均斜率的方差为：

$$\langle (\overline{\partial \Phi / \partial u'})^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} 2\sqrt{(n+1)(n'+1)} \cdot \langle a_{1,n} a_{1,n'} \rangle \tag{16}$$

可以证明^[6]：

$$\langle (\overline{\partial \Phi / \partial u'})^2 \rangle = 1.685(d/r_0)^{5/3} \tag{17}$$

式中： d 是子孔径直径； r_0 是 Fried 常数。则整个圆子孔径上相位的平均斜率波动的均方根值由下式给出(单位为波长)：

$$\sigma_s^2 = \langle (\overline{\partial \Phi / \partial u'})^2 \rangle / \pi^2 = 1.685/\pi^2 (d/r_0)^{5/3} \tag{18}$$

$$\sigma_s = \frac{2.6}{2\pi} (d/r_0)^{5/6} \tag{19}$$

对于给定的子孔径大小，公式(19)表示了不同观测条件和子孔径大小的情况下，哈特曼探测器的测量动态范围。

2.2 波前测量噪声

波前斜率测量的噪声主要受 CCD 相机采集的信号光子噪声和相机的读出噪声影响，分析时要根据哪部分噪声占主导。图 1 给出了对应指定微透镜的夏克-哈特曼探测示意图。

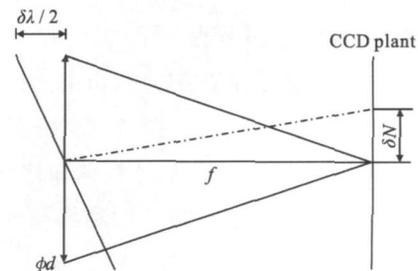


图 1 哈特曼波前传感器探测示意图
Fig.1 Optics scheme for HS wave-front sensor

图中，微透镜的直径为 d ，焦距为 f ，对应 CCD 靶面上的区域宽度是 N_s 个像素，每个像素的大小为 $1 \mu\text{m}$ 。对于给定的倾斜 $\delta\lambda$ ，像点的偏移量为(单位为像素)：

$$\delta N = \frac{\delta\lambda \cdot f}{ld} \tag{20}$$

则波前斜率的测量噪声方差与像点偏差的统计方差的关系如下式：

$$\sigma_M = \frac{ld}{f} \sigma \delta N \quad (21)$$

假设微透镜焦面上的能量分布符合指数分布,则分布函数为:

$$s(N_x, N_y) = G_s \exp \left[-4(N_x^2 + N_y^2) / N_t^2 \right] \quad (22)$$

$$G_s = \frac{4n_a}{\pi N_t^2}$$

式中: N_x, N_y 是 CCD 靶面上的像素坐标; G_s 是信号的动态范围; n_a 是子孔径上探测到的光子总数; N_t 是像点的像素宽度。

像点的偏移量 δN 对应的是某一方向(x 或 y)质心位置, x 方向的质心计算为:

$$\delta N = \frac{\sum \sum s(N_x, N_y) N_x}{n_a} \quad (23)$$

(1) CCD 读出噪声影响

如果信号 s 的误差是由于 CCD 相机的电子噪声引起的,则像素偏移量的方差可得出^[7]:

$$\sigma \delta N^2 = \frac{N_s^4 \sigma_n^2}{12n_a^2} \quad (24)$$

式中: N_s 是参与质心计算的一个方向的像素数,一般取对应子孔径的 CCD 区域的一个方向的像素数。结合公式(21),则

$$\sigma_M^2 = \frac{l^2 d^2 \sigma_n^2 N_s^4}{12n_a^2 f^2} \quad (25)$$

如果目标对于子孔径是衍射受限的:

$$N_t = \frac{\lambda f}{dl} \quad (26)$$

将公式(26)代入公式(25),进行变量代换得:

$$\sigma_M = \frac{4\sigma_n}{\sqrt{3} G_s N_s \varepsilon} \quad (27)$$

式中: G_s / σ_n 表征了 CCD 探测信号信噪比^[7]。

(2) 光子噪声影响

如果信号 s 的误差是由于光子噪声引起的,则像素偏移量的方差为:

$$\sigma \delta N^2 = \frac{N_t^2 \cdot \sigma_s}{8n_a} \quad (28)$$

光子噪声方差符合泊松分布

$$\sigma_s = \sqrt{n_a} \quad (29)$$

$$\sigma \delta N^2 = \frac{N_t^2}{8n_a} \quad (30)$$

$$\sigma_M = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\delta_a d}{\sqrt{n_a} \lambda f} \quad (31)$$

式中: $\delta_a = lN_t$, 是目标在相机靶面上的成像大小。多种噪声的影响直接统计各噪声方差。

3 波前重构误差

具有 K 个子孔径的夏克-哈特曼探测器是在两个正交方向测量给出一组 $2K$ 个局部平均斜率,即: $(\partial \Phi / \partial u_j, \partial \Phi / \partial v_j), j=1, 2, \dots, k$ 。

从梯度重构相位有几种最小二乘估计算法,主要可以分为两类,一类是估计出每个子孔径中心的相位值;另一类是模型法,将相位表示成孔径的函数。模型法存在以下好处:重构对测量噪声不太敏感;计算时间短;模型的个数可根据实际情况选择。

3.1 最小二乘模型重构

由 L 个孔径函数组成的相位模型表达式为:

$$\Phi = \sum_{i=1}^L a_i Z_i \quad i=1, 2, \dots, L \quad (32)$$

从梯度测量数据中得到一组函数系数 $(a_i), i=1, 2, \dots, L$ 。梯度的表达式为:

$$\partial \Phi / \partial u_j = \sum_{i=2}^L a_i \partial Z_i / \partial u_j$$

$$\partial \Phi / \partial v_j = \sum_{i=1}^L a_i \partial Z_i / \partial v_j \quad j=1, 2, \dots, K \quad (33)$$

上式改写成矩阵形式:

$$g = B \cdot a \quad (34)$$

式中: g 是波前测量得到的两个正交方向的平均相位斜率,长度为 $2K$; B 是梯度矩阵,大小为 $2K \times L$; a 是系数矩阵,长度为 L 。

如果矩阵 B 是满秩的,且矩阵 $(B'B)$ 的条件数小于 10^3 ,利用最小二乘原理,解算系数矩阵公式为:

$$a = (B'B)^{-1} \cdot B' \cdot g \quad (35)$$

3.2 重构误差分析

在波前重构过程中,存在两种误差影响,测量传播误差和建模误差。前一误差项与哈特曼数据的测量噪声相关,后一误差项与用于拟合扰动波前的系

列孔径函数的有限大小相关。按最小二乘模型重构算法,测量传播误差可以按下式估算:

$$\sigma_p = \sigma_M \{Tr[(B'B)^{-1}]\}^{1/2} \quad (36)$$

式中: Tr 是矩阵的迹,表征均值对角线参数的累加和。

在仅用 L 个低阶 Zernike 多项式来拟合扰动波前的情况下, Noll^[8] 推导出了残余均方根误差的公式:

$$\sigma_m = 0.54 L^{-\sqrt{3/4}} (D/r_0)^{5/6} \quad L > 10 \quad (37)$$

波前重构的误差可以用两个误差的方差和来描述:

$$\sigma_\phi^2 = \sigma_p^2 + \sigma_m^2 \quad (38)$$

4 误差影响的仿真分析

基于波前探测的图像恢复试验构架如图 2 所示,经过整形的目标图像,通过校正镜 L1 后是平行光,物镜 L2 表征了系统的入瞳大小,设计值为 $D=1\ 200\text{ mm}$ 。光线被分离成两路。一路 V1 经过微透镜阵列 L3 进入 CCD1,采集短曝光图像;另一路 V2 直接进入成像相机 CCD2;两路相机同时采集。采用正方形微透镜,焦距为 7 mm ,尺寸间距为 $200\ \mu\text{m}$,子孔径数 15×15 ,每个子孔径对应 CCD1 靶面上是 8×8 个像元,像元大小 $24\ \mu\text{m}$,相机帧频可设置为 $500/1\ 000\text{ Hz}$ 。对于波前测量误差按公式(19)所示,即使在相机动态范围很小的情况下($60 \sim 70\text{ dB}$),测量误差也优于 $1/10$ 波长。建模误差与望远镜口径和 Zerniker 多项式的项数相关,表 1 给出不同情况下波前探测的建模误差大小情况。

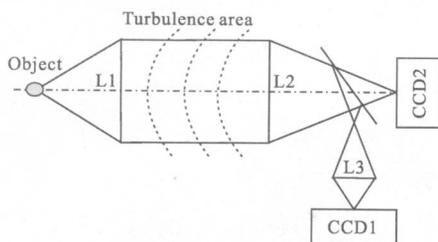


图 2 基于波前测量的图像恢复试验构架

Fig.2 Experimental setup for image restoration from HS wave-front sensing

从表 1 可以看出,在不同大气条件下,为降低波前探测的建模误差,需要慎重选择 Zernike 多项式的参数个数,在一般大气条件下($r_0=10\text{ cm}$),选择 88 阶

表 1 建模误差数据表

Tab.1 Model error data

σ_m/λ	r_0/cm				
	5	10	15	20	30
11	1	1/2	1/3	1/3	1/5
22	1/2	1/3	1/5	1/6	1/8
35	1/3	1/5	1/7	1/9	1/13
55	1/4	1/8	1/11	1/13	1/19
88	1/6	1/11	1/16	1/20	1/28

多项式时, $\sigma_{88}=1/11\lambda$ 。

按 Zernike 多项式的性质^[9]:

$$\{Tr[(B'B)^{-1}]\}^{1/2} \approx 1/10\lambda, \text{测量误差 } \sigma_M \text{ 取 } 1/8\lambda,$$

$$\text{则 } \sigma_p = \sigma_M \{Tr[(B'B)^{-1}]\}^{1/2} \approx 1/80\lambda$$

可以看出,波前重构误差的主要影响因素是建模误差,故:

$$\sigma_\phi = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_m^2} \approx 1/11\lambda \quad (39)$$

5 结论

在基于波前测量的图像恢复过程中,波前测量的误差在不同观测条件、不同探测器元件、不同目标信噪比的情况下会存在较大的差异;在保证目标探测能力的前提下,要根据当地的大气观测条件,选择匹配相应阶数的 Zernike 多项式模型。通过原理分析和仿真验证,为地基光电望远镜图像恢复技术提供了重要参考依据。

参考文献:

- [1] Wang Ningyu, Zhang Tianxu, Hong Hanyu, et al. Restoration of turbulence-degraded images based on phase retrieval algorithm [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2005, 34(5): 597-601. (in Chinese)
王宁宇, 张天序, 洪汉玉, 等. 湍流退化图像相位恢复算法研究[J]. *红外与激光工程*, 2005, 34(5): 597-601.
- [2] Primot J, Rousset G, Fountanella J. Deconvolution from wave-front sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images[J]. *J Opt Soc*, 1990, 7: 1598-160.
- [3] Goodman W. Introduction to Fourier Optics [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006.
- [4] Chang Xiang, Li Rongwang, Xiong Yaoheng. Astronomical

- extended object image reconstruction after primary correction with Yunnan observatory 1.2 m adaptive optics system [C]// SPIE, 2008, 7015: 7015D-1.
- [5] Li Huaqiang, Song Helun, Rao Changhui, et al. Extrapolation method to Shack-Hartmann extend dynamic range of wavefront sensor[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, 16(7): 1203-1207. (in Chinese)
李华强, 宋贺伦, 饶长辉, 等. 增大夏克-哈特曼波前传感器动态测量范围的方法 [J]. 光学精密工程, 2008, 16(7): 1203-1207.
- [6] Zhang Kun, Hong Hanyu, Sun Xiechang, et al. Survey of image deconvolution from wave-front sensing [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 31(6): 131-134. (in Chinese)
张坤, 洪汉玉, 孙协昌, 等. 基于波前测量的图像复原技术综述[J]. 红外与激光工程, 2007, 31(6): 131-134.
- [7] Qi Bo, Chen Hongbin, Liu Shunfa. Regression analysis of wavefront fitting using Zernike polynomial [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2006, 13(5): 396-400. (in Chinese)
齐波, 陈洪斌, 刘顺发. Zernike 多项式波面拟合的回归分析方法[J]. 光学精密工程, 2006, 13(5): 396-400.
- [8] Wang Shuhong, Hu Moufa, Chen Zengping. Noise analysis and the study of SNR model on the astronomical CCD camera [J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2007, 28(5): 731-734. (in Chinese)
王书宏, 胡谋法, 陈增平. 天文 CCD 相机的噪声分析与信噪比模型的研究[J]. 半导体光电, 2007, 28(5): 731-734.
- [9] Noll J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 3: 207-211.

下期预览

复杂空间背景下的弱小目标检测方法

张路平, 李 飏, 王鲁平

(国防科技大学 ATR 国家重点实验室, 湖南 长沙 410073)

摘要: 空间环境弱小目标检测是光学成像制导的关键技术之一。当目标与探测器相距较远时, 在获取的光学图像中目标呈现为无纹理、结构特征的弱小点光源。由于各种噪声的干扰, 很难把目标与噪声区分开来。介绍了一种基于广义似然比检验的弱小目标检测方法。首先对空间环境和目标灰度分布特性进行分析, 把空间成像目标灰度变化建模为一种强度值围绕固定值发生正弦的变化过程。采用行列均值相减法进行背景抑制, 校正探测器响应的非线性, 提高图像信噪比。对经过能量累积后图像进行广义似然比判决, 从噪声中检测出弱小目标, 分析了检测性能, 验证模型的合理性。实验证明: 所提出的算法能够有效检测出空间背景下的弱小目标。