文章编号:1007-2780(2011)01-0111-05

基于 PDE 的非线性图像去噪与增强

韩希珍[1,2],陈朝东[3],赵 建[1*]

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所,吉林 长春 130033,E-mail:xizhen_han@163.com;
2. 中国科学院 研究生院,北京 100039; 3. 第二炮兵工程设计研究所,北京 100011)

摘 要:应用偏微分理论,提出一种改进的基于偏微分方程的非线性图像去噪与增强方法,对传统的 P-M 非线性扩散模型进行改进。首先将图像变换到梯度域,然后通过改变梯度域扩散函数来达到去噪和增强的目的。与以往的时域和频域图像去噪方法相比,本文方法不仅能有效去除噪声,还能很好地保留图像的纹理细节。文章采用有限差分法将偏微分方程离散化,并结合热方程简化计算复杂度,从而实现简单快速的计算过程,为实时的图像去噪与增强处理提供保证。

关 键 词:图像去噪与增强;偏微分方程;扩散函数;有限差分法

中图分类号:TP391.9 **文献标识码**:A **DOI**:10.3788/YJYXS20112601.0111

Nonlinear Image De-Noising and Enhancement Based on PDE

HAN Xi-zhen[1,2], CHEN Chao-dong[3], ZHAO Jian[1*]

(1 *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun* 130033, *China*, *E-mail*: *xizhen_han@163.com*;
2. *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039, *China*;
3. *The Second Artillery Engineering Design Institute, Beijing* 100011, *China*)

Abstract: Applying partial differential equation(PDE) theory, an improved algorithm of nonlinear image de-noising and enhancement was proposed based on partial differential equation by improving traditional Perona & Malik nonlinear diffusion model. The image is transformed to the gradient field to achieve the purpose of image de-noising and enhancement through changing the gradient field diffusion function. Compared with the traditional spatial and frequency domain image de-noising algorithms, this algorithm can not only filter off image noise effectively, but also maintain better image texture details. This paper uses the finite difference method to discrete the partial differential equation. And it combines with the heat equation to simplify the computational complexity. So the computational process of this algorithm is simple and fast. It provides a guarantee for real-time image de-noising and enhancement processing.

Key words: image de-noising and enhancement; partial differential equation; diffusivity; finite difference method

1 引 言

在工程应用中,图像往往要经过各种传输和转换,在过程中会受到各种因素的影响而使最终的图像质量下降。为了能顺利进行图像的后续工作,图像去噪和增强成为图像处理领域的关键环

收稿日期:2010-05-25;**修订日期**:2010-06-28

作者简介:韩希珍(1984-),女,山东德州人,硕士,主要研究方向是数字图像处理、图像去噪与增强。

*通讯联系人,E-mail:zhaojian6789@yahoo.com

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

节，它不仅可以提高人类视觉识别信息的准确性，还是对图像做进一步处理的可靠保证。近年来，非线性扩散滤波方法在图像处理领域得到了广泛应用。非线性扩散过程是与物理中热扩散过程相符合的动力学描述，可以在对图像进行平滑的同时去除噪声，并且使得图像边界的轮廓不被扩散。偏微分扩散方程就是一种典型的非线性扩散滤波方法。

传统的空域线性滤波方法主要有均值滤波、中值滤波和高斯滤波等。此类方法理论发展较为成熟，数字分析简单，对滤除与信号不相关的噪声效果较明显；但本身存在着明显的缺陷，在平滑掉噪声的同时会把图像的边缘纹理细节也平滑模糊。基于频域的小波边缘检测去噪方法[1]也广泛应用于图像处理的各个领域，其特殊的时频分辨能力使其基本取代了传统的频域分析方法。该方法比较适用于在有用信号和噪声的频带相互分离时去除确定性噪声，而对有用信号和噪声的频带相互重叠的情况则处理效果不太理想。所以用非线性扩散滤波方法取代传统的线性滤波是必然的趋势。

1990年，Perona和Malik[2]提出了保持边界的非线性扩散方程[3]，克服了线性扩散滤波的缺点，对图像去噪效果有了很大的改善，但在去噪和保持边界的微小细节方面处理效果仍然不是很理想。本文通过改进P-M各向异性扩散模型，选择合适的扩散系数方程，在去除图像随机噪声和保持边缘细节方面取得了很好的效果。

2 P-M非线性扩散模型

在物理学里，如果介质（如气体、液体和固体）中存在某种杂质，并且其浓度分布不均匀，则杂质将从浓度高的区域向浓度低的区域迁移。若以函数 $u(x,y,t)$ 表示浓度随空间和时间的变化，那么空间分布的不均匀性可用梯度 ∇u 来表示。在一定条件下，流量与浓度梯度的关系为：

$$\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{D}\nabla u \tag{1}$$

式(1)中，负号表示流量由高浓度向低浓度处流动；$\boldsymbol{D}$ 为扩散张量，是正定对称矩阵。杂质在扩散的过程中不会产生新的也不会损失，所以可以用连续方程表示为式(2)：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{J} \tag{2}$$

式中 t 为时间。将式(1)代入式(2)得扩散方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\boldsymbol{D}\cdot\nabla u) \tag{3}$$

将物理扩散理论应用到图像去噪算法中，为了达到去噪并同时保留边缘的目的，希望在图像比较平坦的区域传导系数能自动增大，可使平坦区域中较小的不规则起伏噪声被平滑；而在图像的边缘附近，传导系数能自动减小，从而边缘可几乎不受影响。于是Perona和Malik首先提出了如下的非线性扩散模型[4-6]：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_t}{\partial t} = \operatorname{div}[g(|\nabla u_t|)\nabla u_t] \\ u(x,y,0) = u_0(x,y)\end{cases} \tag{4}$$

式中 u_t 为时刻 t 时的图像，∇u_t 为图像的梯度。函数 $g(|\nabla u_t|)$ 称为扩散函数，其值表示扩散强度，通常 $g(|\nabla u_t|)$ 为非负的光滑单调下降函数，现给定了两种形式，分别为：

$$g(|\nabla u_t|) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{|\nabla u_t|}{k}\right)^2} \tag{5}$$

和

$$g|\nabla u_t| = e^{-\left(\frac{|\nabla u_t|}{k}\right)^2} \tag{6}$$

式中 k 为梯度阈值。P-M非线性扩散模型能解决抑制噪声和保留边缘两者之间的矛盾，取得了较好的效果，但也存在着一些缺陷[7]：

(1)各向异性扩散不但在垂直梯度的方向扩散，同时在梯度方向也在扩散，而且与梯度幅度有关。当图像梯度很大时，虽然扩散系数 $g(|\nabla u_t|)$ 趋近于零，但是始终不能为零，即在边缘处仍然有领域之间的扩散，从而模糊了边缘和纹理。

(2)当原始图像 u_0 被噪声严重污染或对比度很低的情况下，$|\nabla u_t|$ 大幅度震荡，从而导致平滑的效果很不理想。

3 改进的非线性扩散模型

针对P-M非线性扩散模型的缺陷，本文着重考虑如何改进扩散函数，使图像在比较平坦的区域扩散幅度比较大，而在有边缘和纹理的地方逐渐减小扩散直到停止扩散，从而很好地保留边缘和纹理；同时，在图像被噪声污染严重或对比度比较低的情况下，扩散效果仍然较好。现如下构造扩散函数：

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$g(\nabla u_t) = \frac{(k_1 - \nabla u_1) \times (\nabla u_t + k_2)}{1 + \frac{|\nabla u_t|^2}{k_3}} \quad (7)$$

式中 k_1、k_2、k_3 为梯度门限。该扩散函数与梯度值的关系如图 1 所示。

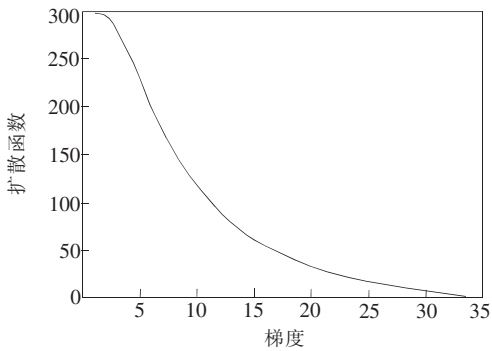

图 1　扩散函数与梯度的关系

Fig. 1　Relationship between diffusion function and gradient

通过图 1 的扩散函数与梯度的关系可以看出：当梯度值非常小时，扩散幅度非常大，可以快速地将噪声除掉；随着梯度值的增加，扩散函数逐渐减小，直到停止扩散，从而很好地保留了边缘和纹理。选择不同的梯度门限 k_1、k_2 和 k_3 的值，可以控制扩散函数的扩散速度以及停止扩散的梯度阈值。

另外，本文在扩散模型中还加入了强度系数，使得图像在去除噪声的同时能增强细节信息，从而低对比度图像也能有较好的视觉效果。模型公式如下：

$$\frac{\partial u_t(x,y)}{\partial t} = \mathrm{div}[g(\nabla u_t)\nabla u_t] + \omega \times u_t \quad (8)$$

式中 ω 为强度因子，div 为散度算子。

4　模型的数值解法

常用的求解偏微分方程的数值方法主要有有限差分法、有限元法和有限体积法[8]等。在图像处理应用中，有限差分法最为常用，因为待处理的图像通常是在二维空间中，按等间隔采样而得到的离散化数字图像恰好构成了有限差分法所需要的等分网格。本文中梯度运算采用向前差分来近似[9]，为了保持平衡，散度运算采用向后差分来近似。

时间偏微分：

$$\left.\frac{\partial u_t}{\partial t}\right|_i^n \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (9)$$

空间偏微分：

$$\left.\frac{\partial u_t}{\partial x}\right|_i^n \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x, y)^n - u(x,y)^n}{\Delta x} \quad (10)$$

$$\left.\frac{\partial u_t}{\partial y}\right|_i^n \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta y} = \frac{u(x, y+\Delta y)^n - u(x,y)^n}{\Delta y} \quad (11)$$

散度算子：

$$\mathrm{div}[g(\nabla u_t)\nabla u_t] = \frac{\partial}{\partial x}\left[g(\nabla u_t)\frac{\partial u_t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(\nabla u_t)\frac{\partial u_t}{\partial y}\right] \quad (12)$$

令 $g(\nabla u_t)\nabla u_t = G$，则：

$$\mathrm{div}(G) = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{G(x,y)^n - G(x-\Delta x, y)^n}{\Delta x} + \frac{G(x,y)^n - G(x, y-\Delta y)^n}{\Delta y} \quad (13)$$

以上差分方法的空间步长 Δx 和 Δy 均取 1。综合公式(9)～(13)可得改进模型的迭代过程如下：

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x,y) = {} & u^n(x,y) + \\ & \Delta t[g(\nabla u^n(x,y)][u^n(x+1,y) - u^n(x,y)] - \\ & g[\nabla u^n(x-1,y)][u^n(x,y) - u^n(x-1,y)] + \\ & g[\nabla u^n(x,y)][u^n(x,y+1) - u^n(x,y)] - \\ & g[\nabla u^n(x,y-1)][u^n(x,y) - u^n(x,y-1)] + \\ & \omega \times u^n(x,y) \end{aligned} \quad (14)$$

本文在数值计算过程中，不仅采用空域有限差分法，还采用了时域有限差分法。图像在梯度场重建的过程中不是通过最小二乘法求得 Poisson 方程直接求解，而是引用热方程，采用时域有限差分法，通过对时间 t 的偏导进一步转化为迭代过程来实现。本文方法简单直观，而且大幅减小了计算量和存储空间，为实现实时图像去噪处理提供了保障。

5　实验结果与分析

为了证明本文改进算法的优越性，进行了一组仿真对比实验，将一幅带有噪声的原始图像分别进行中值滤波、高斯滤波、小波去噪、P-M 模型以及本文改进模型处理。在改进模型中，取 $k_1 = 35$，$k_2 = 8$，$k_3 = 35$，$\Delta t = 0.000\ 1$，$\omega = 1$，迭代次数 $n = 30$。处理结果如图 2 所示。

通过以上图片的对比可以看出：中值滤波和高斯滤波除噪的效果不明显；小波去噪模糊了边缘；P-M 模型虽能除去噪声，但部分纹理细节也模

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

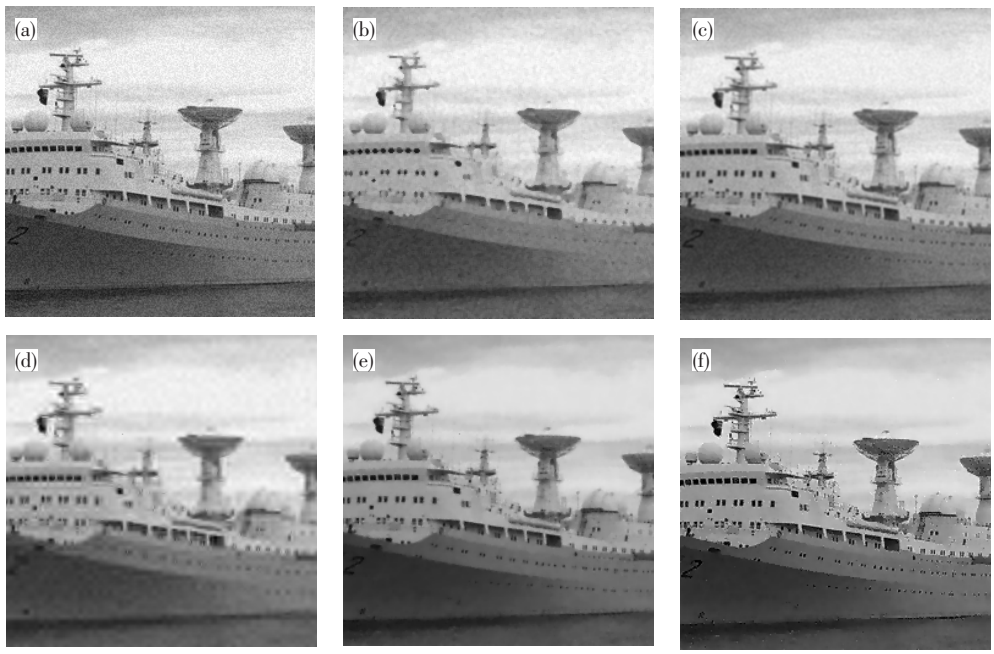

图 2 带噪声原图及其经过各种滤波算法后的结果对比.(a)原图;(b)中值滤波结果;(c)高斯滤波结果;(d)小波去噪结果;(e)P-M 滤波结果;(f)本文改进算法结果.

Fig. 2 Comparison of the original image with noise and the results of five filtering algorithms. (a) Original image;(b) Median filtering result;(c) Gaussian filtering result;(d) Wavelet de-noising result;(e) P-M filtering result;(f) Improved algorithm result.

糊了;本文算法不但有效地去除了噪声,还很好地保留了边缘和纹理细节。

下面对 P-M 模型和本文改进模型进行客观评价。常用的客观评价指标有:绝对均方误差(MSE)、绝对均值误差(MAE)、峰值信噪比(PSNR)、结构相似法(SSIM)和平均梯度等[8]。本文采用峰值信噪比(PSNR)[7]对图像去噪结果进行客观评价,表达式为:

$$k_{\mathrm{PSNR}} = 10\log_{10}\frac{255^2}{\frac{1}{m\times n}\sum_{x=1}^{m}\sum_{y=1}^{n}[u(x,y)-f(x,y)]^2} \tag{15}$$

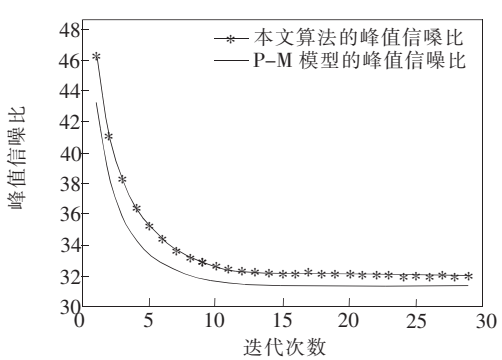

图 3 P-M 模型与改进模型的峰值信噪比曲线图

Fig. 3 PSNR curve of P-M model and improved model

式中 $m\times n$ 是图像的大小,$u(x,y)$和 $f(x,y)$分别是原始图像和滤波后图像在(x,y)处的像素值。P-M 非线性扩散模型和本文改进模型的峰值信噪比的对比曲线如图 3 所示。

通过曲线的对比可以看出,本文改进模型的 8 峰值信噪比始终比 P-M 模型的峰值信噪比大,即说明改进模型的除噪效果比 P-M 扩散模型好。

6 结 论

本文在进行图像去噪算法中脱离了传统的时域或频域滤波,将图像变换到梯度域,应用偏微分方程,对 P-M 非线性扩散模型进行改进,克服了 P-M 模型的不足并很好地处理了图像去噪与边缘保留两者之间的矛盾。通过构造合适的扩散函

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数，不仅达到了去噪目的，而且还完整保留了图像的纹理细节。但本文改进模型也存在一些问题，例如参数较多、参数的选择不能够自适应等，这将在今后的工作中进一步改进。

参 考 文 献：

[1] 林晓梅，李琳娜，牛刚，等. 基于小波边缘检测的图像去噪方法 [J]. 光学 精密工程，2004，12(1)：88-93.

[2] Perona P, Malik J. Scale-Space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12：629-639.

[3] 崔峰峰，黄淑祥. 基于 PDE 的图像去噪 [D]. 济南：山东大学，2008.

[4] Wang Y, Niu R Q. Forward-and-Backward diffusion for hyperspectral remote sensing image smoothing and enhancement [J]. *SPIE*, 2008, 7285：72851C(1-12).

[5] Kornprobst P, Deriche R, Aubert G. Image restoration via PDE [J]. *SPIE*, 2002, 2942：22-33.

[6] liu X P, Li B. Impulsive noise removal by nonlocal fuzzy diffusion [C]//*The 4th international Conference of Image and Graphics*, Chengdu, China: IEEE：2007：155-159.

[7] 朱正煌，邱晓晖. 基于前向和后向扩散的图像增强算法的改进 [J]. 电脑知识与技术(学术交流)，2007，(15)：817-827.

[8] 陈守水，杨新. 基于偏微分方程的图像降噪及质量评价研究 [D]. 上海：上海交通大学，2008.

[9] 李波，苏志勋，刘秀平. 基于 PDE 的图像去噪、修补及分解研究 [D]. 大连：大连理工大学，2008.

文章编码的识读

为了便于期刊文章的检索、查询、全文信息索取和远程传递以及著作管理，凡具有文献标识码的文章均可标识一个数字化的文章编号，其中 A(理论与应用研究学术论文(包括综述报告))、B(实用性技术成果报告(科技)、理论学习与社会实践总结(社科))、C(业务指导与技术管理性文章(包括领导讲话、特约评论等))三类文章必须编号。

文章编号由期刊的国际标准刊号、出版年、期次号及文章的篇首码和页数五段共 20 位数字组成，其结构为：XXXX-XXXX(YYYY)NN-PPPP-CC，其中 XXXX-XXXX 为文章所在期刊的国际标准刊号(ISSN)，YYYY 为文章所在期刊的出版年，NN 为文章所在期刊的期次，PPPP 为文章首页所在期刊页码，CC 为文章页数，“-”为连字符。该编号在全世界范围内是该文章的惟一标识。

文章编号由各编辑部给定，中文文章编号的标识为“文章编号：”或[文章编号]。如：文章编号：1007-2780(2003)02-0097-04 为发表在《液晶与显示》2003 年第 2 期第 97～100 页(共 4 页)上题为“液晶中聚合物网络的形貌研究”(作者：杨文君等)一文的文章编号。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net