

彩色图像四元数矩不变量的研究

朱明¹, 孙继刚^{1,2}, 郭立强¹

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 为了研究彩色图像的矩不变量特性, 采用四元数进行彩色图像处理, 以充分利用彩色图像的整体信息, 实现彩色图像 RGB 并行处理。本文把传统灰度图像的矩不变量理论推广应用到四元数层面上来, 定义了彩色图像的四元数矩并构造了该矩函数的仿射不变量。实验结果表明: 所提出的彩色图像的四元数矩不变量的稳定性要优于 L. V. Gool 等人提出的彩色矩仿射不变量, 其 σ/u 值提高了 2 个数量级。所提出的四元数仿射矩不变量可以作为模式识别中彩色目标的特征描述子来实现彩色图像目标的识别与跟踪。

关键词: 彩色图像; 四元数; 四元数矩; 仿射不变量

中图分类号: TP391.4 文献标识码: A

Quaternion moment invariant for color image

ZHU Ming¹, SUN Ji-gang^{1,2}, GUO Li-qiang^{1,2}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: In order to study moment invariants of color images, the quaternion is used to process color images and to implement the parallel processing of R , G and B components. Traditional complex moments for gray-level images are introduced to the quaternion, and the quaternion moments for describing a color image are presented. Then, the quaternion affine moment invariants are derived. Experimental results show that the stability of this method is superior to that of L. V. Gool's color affine moment invariants, and the value of σ/u have been improved by two orders of magnitude. The proposed quaternion moment invariants could be a useful tool in color pattern recognition and tracking.

Key words: color image; quaternion; quaternion moment; affine moment invariant

1 引言

图像矩函数的定义及其不变性的研究始于上个世纪60年代,发展于80、90年代。从图像中计算出来的矩不变量集合描述了图像的全局特征,并提供了该图像区别于其它图像所特有的几何信息。图像矩不变量的这种特征描述能力被广泛应用于图像匹配和模式识别领域中。从仿生学角度来讲,图像的矩不变量反映了视觉信息在某些变换下所具有的不变性,即不同模式之间的本质差别。从数学角度来讲,矩不变量是一类代数不变量。

有关矩不变量的开拓性工作由 Hu 提出^[1],他利用代数不变量理论推出了7个相似矩不变量并把它们应用于目标识别中。但相似变换只是图像几何形变中较小的一类,在实际的工程应用中需要构造仿射变换下的矩不变量。目前,国内外有关仿射不变量的研究论文有百余篇,研究方法也比较多,一些经典的方法,如:基于小波的仿射不变量研究^[3]、互权重矩方法^[4](cross-weighted moments)、多尺度自卷积方法^[5]及基于 trace 变换的仿射不变量构造^[6]等。此外还有基于矩技术的仿射不变量研究,如:Flusser 和 Reiss 分别独立构造了仿射矩不变量^[2,7]。文献[7-8]中讨论了仿射矩不变量在目标识别中的应用。文献[9]把仿射矩不变量用于图像匹配。文献[10]构造了模糊条件下的仿射矩不变量。文献[11]利用仿射矩不变量对发生仿射形变的图像进行配准。文献[12]研究了基于 Hu 矩构造仿射矩不变量的方法。文献[13]采用图论的方法构造了高阶仿射矩不变量。文献[14]在傅里叶变换域中构造了仿射矩不变量并用于对称图像的认识。

尽管关于仿射不变量的研究论文很多,但研究的对象都是灰度图像,有关彩色图像矩不变量的研究却很少。这主要是由于矢量信号处理理论尚未完全建立起来,目前针对彩色图像处理的算法多是以分通道的形式来处理的。

本文以四元数矩阵来对彩色图像进行建模,

定义了四元数矩并构造了该矩函数的仿射不变量。基于四元数矩的仿射不变量研究为彩色图像的不变量理论提供了一个新的方法。实验结果表明,本文所提出的算法要优于分通道处理的方法。

2 预备知识

这里简要介绍有关四元数的基础知识。

四元数是复数的推广,是由1个实部和3个虚部构成,即:

$$q = q_r + q_i \cdot i + q_j \cdot j + q_k \cdot k, \quad (1)$$

其中3个虚部满足如下乘法规则:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (2)$$

$$ij = -ji = -1, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \quad (3)$$

若四元数 q 的实部为零,称 q 为纯四元数。

四元数的共轭为:

$$\bar{q} = q_r - q_i \cdot i - q_j \cdot j - q_k \cdot k. \quad (4)$$

四元数的范数为:

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2}. \quad (5)$$

四元数的逆为:

$$q^{-1} = \bar{q} / \|q\|^2. \quad (6)$$

若纯四元数 q 的范数为1,称 q 为单位纯四元数。

设 μ 为单位纯四元数,四元数的欧拉公式为:

$$e^{\mu\theta} = \cos\theta + \mu\sin\theta. \quad (7)$$

对于一幅彩色图像 $f(x, y)$, 把它以纯四元数的形式进行表示:

$$f(x, y) = f_R(x, y) \cdot i + f_G(x, y) \cdot j + f_B(x, y) \cdot k, \quad (8)$$

其中: $f_R(x, y)$, $f_G(x, y)$ 和 $f_B(x, y)$ 分别代表彩色图像的 R 、 G 和 B 分量, x 和 y 分别代表像素所在图像矩阵的行号和列号。这样,一幅彩色图像就可以用四元数矩阵来表示。基于四元数的彩色图像处理就是直接对这个四元数矩阵来处理的,相对于传统的分通道或是变换成灰度图像后再处理的方法而言,四元数方法更能体现出彩色图像的整体性,为实际的工程应用提供了一个新的突破点。

3 四元数矩

3.1 四元数矩的定义

从数学角度来讲,矩函数(严格意义上讲是泛函)是一个积分变换,把图像 $f(x, y)$ 投影到核函数上,对积分结果进行适当的处理来构造相应变换下的不变量。本节给出了基于四元数的彩色图像矩函数表达式。由于四元数乘法不满足交换律,因此它有 3 种表达式。

设彩色图像为 $f(x, y)$, $(m+n)$ 阶左四元数矩定义如下:

$$Q_L(m, n) = \iint_{R^2} (x - \mu y)^m (x + \mu y)^n f(x, y) dx dy. \tag{9}$$

右四元数矩定义如下:

$$Q_R(m, n) = \iint_{R^2} f(x, y) (x - \mu y)^m (x + \mu y)^n dx dy. \tag{10}$$

双边四元数矩定义如下:

$$Q_T(m, n) = \iint_{R^2} (x - \mu y)^m f(x, y) (x + \mu y)^n dx dy, \tag{11}$$

其中 μ 为任意单位纯四元数,这里 μ 的取值为:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}i + \frac{\sqrt{3}}{3}j + \frac{\sqrt{3}}{3}k. \tag{12}$$

尽管四元数矩的表达式有 3 种,但在描述彩色图像几何形变的能力上是一样的^[17]。为了下文论述方便起见,本文中四元数矩是指左四元数矩。四元数矩的离散化形式如下:

$$Q(m, n) = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (x - \mu y)^m (x + \mu y)^n f(x, y). \tag{13}$$

3.2 基于四元数的仿射不变量

仿射变换由旋转、尺度、剪切和平移变换构成:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中 $\alpha \neq \beta, \delta \neq 0$ 。

接下来研究在上述 4 个变换下的不变量,最终实现仿射不变量的构造。首先把式(9)变换到极坐标系下:

$$Q(m, n) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{m+n+1} e^{\mu(n-m)\theta} f(r, \theta) dr d\theta. \tag{15}$$

设 $f(r, \theta + \varphi)$ 是原始彩色图像 $f(r, \theta)$ 旋转 φ 角度得到的,把 $f(r, \theta + \varphi)$ 带入到式(15)中得到:

$$Q'(m, n) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{m+n+1} e^{\mu(n-m)\theta} \cdot f(r, \theta + \varphi) dr d\theta = e^{\mu(m-n)\varphi} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{m+n+1} \cdot e^{\mu(n-m)\theta} f(r, \theta) dr d\theta = e^{\mu(m-n)\varphi} Q(m, n). \tag{16}$$

对式(16)两端取范数得:

$$\|Q'(m, n)\| = \|e^{\mu(m-n)\varphi} Q(m, n)\| = \|Q(m, n)\|. \tag{17}$$

式(17)表明,四元数矩函数的范数具有旋转不变性。接下来利用二项式定理把式(15)的积分核展开:

$$Q(m, n) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j \cdot \mu^{(m+n-i-j)} (-1)^{(m-i)} H_{i+j, m+n-i-j},$$

其中:

$$H_{p, q} = \iint_{R^2} x^p y^q f(x, y) dx dy. \tag{18}$$

$H_{p, q}$ 的形式与传统的 Hu 矩一样,惟一不同的是 $H_{p, q}$ 中被积函数 $f(x, y)$ 是四元数值函数,相应地积分值也是四元数。这里利用文献[18]中的归一化方法来构造 $H_{p, q}$ 在尺度和剪切变换下的不变量。

对于剪切变换 $x' = x + \delta x, y' = y$:

$$H'_{p, q} = \iint_{R^2} x'^p y'^q f(x', y') dx' dy' = \iint_{R^2} (x + \delta y)^p y^q f(x, y) dx dy = \sum_{k=0}^p C_p^k \delta^{p-k} H_{k, p+q-k}. \tag{19}$$

由上式知:

$$H'_{1, 1} = \delta H_{0, 2} + H_{1, 1}. \tag{20}$$

令 $H'_{1, 1} = 0$, 可得 $\delta = \frac{H_{1, 1}}{H_{0, 2}}$, 把它带入式(19)

中,可以得到具有剪切不变性的函数:

$$H_{p, q}^{sh} = \sum_{k=0}^p C_p^k (-H_{1, 1}/H_{0, 2})^{(p-k)} H_{k, p+q-k}. \tag{21}$$

对于尺度变换 $x' = \alpha x, y' = \beta y$,有:

$$H'_{p,q} = \iint_{R^2} x'^p y'^q f(x', y') dx' dy' =$$

$$\iint_{R^2} (\alpha x)^p (\beta y)^q f(x, y) \alpha \beta dx dy = \alpha^{p+1} \beta^{q+1} H_{p,q} . \quad (22)$$

接下来在式(21)和式(22)的基础上构造具有尺度不变性的矩函数:

$$H_{p,q}^{sh'} = \sum_{k=0}^p C_p^k (-H'_{1,1}/H'_{0,2})^{(p-k)} H'_{k,p+q-k} =$$

$$\sum_{k=0}^p C_p^k \left(-\frac{\alpha}{\beta} H_{1,1}/H_{0,2}\right)^{(p-k)} \alpha^{k+1} \beta^{p+q-k+1} H_{k,p+q-k} =$$

$$\alpha^{p+1} \beta^{q+1} H_{p,q}^{sh} . \quad (23)$$

由式(23)得到如下方程组:

$$\begin{cases} H_{2,0}^{sh'} = \alpha^3 \beta H_{2,0}^{sh} = 1 \\ H_{0,2}^{sh'} = \alpha \beta^3 H_{0,2}^{sh} = 1 \end{cases} . \quad (24)$$

解该方程组得:

$$\alpha = \left[\frac{H_{0,2}^{sh}}{(H_{2,0}^{sh})^3} \right]^{\frac{1}{8}}, \beta = \left[\frac{H_{2,0}^{sh}}{(H_{0,2}^{sh})^3} \right]^{\frac{1}{8}} , \quad (25)$$

把式(25)代入式(23)中得到具有剪切和尺度不变性的矩函数:

$$H_{p,q}^{sh,sc} = (H_{0,2}^{sh})^{\frac{p-3q-2}{8}} (H_{2,0}^{sh})^{\frac{q-3p-2}{8}} H_{p,q}^{sh} . \quad (26)$$

平移不变性的获取是通过把彩色图像的坐标原点平移到彩色图像的重心实现的。最终,可以构造出基于四元数矩的仿射不变量:

$$\phi(p,q) = \| (H_{0,2}^{sh})^{\frac{p-3q-2}{8}} (H_{2,0}^{sh})^{\frac{q-3p-2}{8}} H_{p,q}^{sh} \| . \quad (27)$$

4 实验

本节给出了四元数矩仿射不变量的数值结果,并与文献[15]中所提出的彩色矩仿射不变量进行对比。图1中,第1幅图像为原始图像,其余

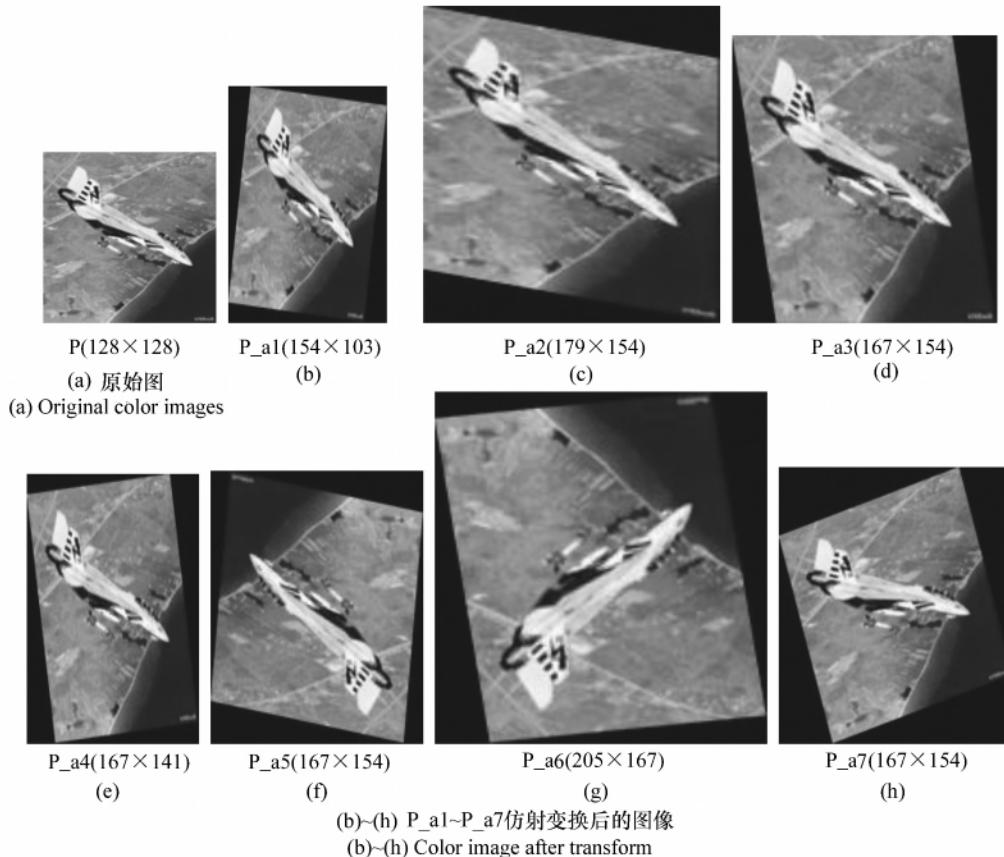


图1 仿射变换前后的8幅图像

Fig. 1 Color images and their affine transformed versions

7 幅图像是经过仿射变换后的图像,仿射变换的参数随机选定。在图像的下方有该图像的尺寸参数。

利用式(27)计算各幅图像的低阶仿射不变矩,其结果见表1。表2是彩色矩仿射不变量的实验结果。

F. Mindru 等人对 Hu 矩进行推广,定义了彩色矩仿射不变量:

$$S_{02} = \frac{M_{00}^2 M_{00}^0}{(M_{00}^1)^2}, \quad (28)$$

$$D_{02} = \frac{M_{00}^1 M_{00}^0}{M_{00}^{10} M_{00}^{01}}, \quad (29)$$

这里只列举了该文献中的两个不变量,在表2中,各个不变量的具体表达式以及这方面更详细的内容可参见文献[15]。

本文采用标准差与期望之比(σ/u)来对不变量的稳定性进行量化。由于标准差刻画了样本偏离均值上下波动的程度, σ 相对于 u 越小,则说明样本越稳定。

对比表1和表2,本文所提出的不变量的 σ/u 值比彩色矩仿射不变量的稳定性提高了2个数量级。文献[15]中彩色矩的表达式对彩色图像的RGB通道分别进行了幂运算处理。以彩色矩为基础的不变量构造还可能只涉及某一个或两个通道的数据。本文所提出的四元数矩,彩色图像以纯四元数的形式参与运算,并不涉及通道数据的幂运算,数值稳定性会高一些。总之,本文所提出的四元数矩仿射不变量可以作为模式识别中彩色目标的特征描述子。

表 1 四元数矩仿射不变量
Tab. 1 Quaternion moment invariants

图像	仿射不变量(ϕ)							
	$\phi_{1,2}$	$\phi_{2,2}$	$\phi_{2,4}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,4}$	$\phi_{5,6}$
P	1.276 9	1.298 2	0.953 8	2.866 9	2.157 7	2.272 9	2.225 8	2.277 6
P_a1	1.284 6	1.305 2	0.953 8	2.899 0	2.147 7	2.274 2	2.224 6	2.267 5
P_a2	1.274 1	1.298 7	0.953 5	2.867 4	2.157 9	2.271 5	2.224 9	2.279 8
P_a3	1.274 4	1.305 0	0.953 7	2.855 6	2.124 1	2.276 6	2.220 5	2.280 4
P_a4	1.280 3	1.299 3	0.953 4	2.890 1	2.148 5	2.269 7	2.224 5	2.273 3
P_a5	1.297 3	1.277 9	0.953 1	2.879 3	2.131 2	2.254 4	2.225 5	2.290 3
P_a6	1.273 5	1.312 8	0.955 4	2.808 8	1.987 2	2.291 1	2.198 0	2.254 2
P_a7	1.280 6	1.299 2	0.953 4	2.877 8	2.168 7	2.270 0	2.226 5	2.280 9
σ/u	0.006 2	0.007 7	0.000 7	0.009 6	0.027 6	0.004 4	0.004 3	0.004 8

表 2 彩色矩仿射不变量
Tab. 2 Color moment invariants

图像	仿射不变量(S 或 D)							
	$S_{0,2}$	$D_{0,2}$	$S_{1,2}$	$D_{1,1}$	$D_{1,2}^1$	$D_{1,2}^2$	$D_{1,2}^3$	$D_{1,2}^4$
P	0.117 1	0.101 5	1.830 2	1.398 5	1.614 3	1.852 7	1.777 2	1.560 3
P_a1	0.190 1	0.176 7	1.791 7	1.317 0	1.596 4	1.808 0	1.670 5	1.484 3
P_a2	0.189 0	0.175 3	1.924 4	1.536 6	1.664 6	1.930 5	1.928 4	1.693 2
P_a3	0.216 0	0.202 6	1.903 7	1.510 8	1.678 6	1.936 8	1.869 7	1.675 0
P_a4	0.214 6	0.201 4	1.828 8	1.417 1	1.620 6	1.866 7	1.794 4	1.579 5
P_a5	0.216 0	0.202 7	1.259 9	1.984 8	0.859 8	1.257 1	2.296 7	2.101 0
P_a6	0.305 9	0.292 4	1.927 2	1.550 7	1.706 7	1.963 6	1.904 9	1.713 0
P_a7	0.206 0	0.192 3	1.917 2	1.537 1	1.701 8	1.958 3	1.893 5	1.701 5
σ/u	0.249 9	0.270 4	0.124 3	0.131 3	0.182 6	0.128 9	0.097 4	0.109 9

4 结 论

本文把传统灰度图像的复数矩推广到四元数层面,提出了四元数矩的定义,构造了基于四元数

矩的彩色图像仿射不变量。实验结果表明:本文所提出的不变量的稳定性要优于 L. V. Gool 等人提出的彩色矩仿射不变量^[15],其 σ/u 值提高了 2 个数量级。未来的工作主要是研究利用本文所提出的四元数矩不变量进行彩色目标识别。

参考文献:

- [1] HU M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. *IRE Trans. Inf. Theory*, 1962, 8(2): 179-187.
- [2] REISS T H. The revised fundamental theorem of moment invariants [J]. *IEEE Trans. PAMI*, 1991, 13(8): 830-834.
- [3] TIENG Q M, BOLES W W. Wavelet-based affine invariant representation: a tool for recognition planar objects in 3D space [J]. *IEEE Trans. PAMI*, 1997, 19(8): 846-857.
- [4] YANG ZH W, COHEN F S. Cross-weighted moments and affine invariants for image registration and matching [J]. *IEEE Trans. PAMI*, 1999, 21(8): 804-814.
- [5] HEIKKILÄ J. Multi-scale autoconvolution for affine invariant pattern recognition [C]. Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02), Quebec, Canada, 11-15 Aug 2002: 119-122.
- [6] PETRON M, KADYROV A. Affine invariant features from the trace transform [J]. *IEEE Trans. PAMI*, 2004, 26(1): 30-44.
- [7] FLUSSER J, SUK T. Affine moment invariants: a new tool for character recognition [J]. *Pattern Recogn. Lett.*, 1994, 15(4): 433-436.
- [8] MEI Y, ANDROUTSOS D. Robust affine invariant region-based shape descriptor: the ICA Zernike moment shape descriptor and the whitening Zernike moment shape descriptor [J]. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 2009, 16(10): 877-880.
- [9] HEIKKILÄ J. Pattern matching with affine moment descriptors [J]. *Pattern Recogn. Lett.*, 2004, 37(9): 1825-1834.
- [10] SUK T, FLUSSER J. Combined blur and affine moment invariants and their use in pattern recognition [J]. *Pattern Recogn. Lett.*, 2003, 36(2): 2895-2907.
- [11] FLUSSER J, SUK T. A moment-based approach to registration of images with affine geometric distortion [J]. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, 1994, 32(2): 382-387.
- [12] LIU J, LI D, TAO W, et al. An automatic method for generating affine moment invariants [J]. *Pattern Recogn. Lett.*, 2007, 28(16): 2295-2304.
- [13] SUK T, FLUSSER J. Graph method for generating affine moment invariants [C]. Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'04), Cambridge, UK, 23-26 Aug 2004: 192-195.
- [14] WEN CH Y, ZHANG Y, ZHANG Y N. Recognition of symmetrical images using affine moment invariants in both frequency and spatial domains [J]. *Pattern Anal Appl*, 2002, 5(3): 316-325.
- [15] MINDRU F, TUYTELAARS T, GOOL L V, et al. Moment invariants for recognition under changing viewpoint and illumination [J]. *Computer Vis. Image Und.*, 2004, 94(1-3): 3-27.
- [16] KANTOR I L, SOLODOVNIKOV A S. *Hypercomplex Number: An Elementary Introduction to Algebras* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [17] 郭立强. 基于四元数的彩色图像处理算法研究 [D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2011.
GUO L Q. The study of color image processing algorithms based on quaternion [D]. *Beijing: Graduate University of Chinese Academy of Sciences*, 2011. (in Chinese)
- [18] ROTHE I, SUSSE H, VOSS K. The method of normalization to determine invariants [J]. *IEEE Trans. PAMI*, 1996, 18(4): 366-376.

作者简介: 朱明(1964—), 男, 江西南昌人, 研究员, 博士生导师, 主要从事图像处理、光电成像测量技术以及目标识别与电视跟踪技术等方面的研究。E-mail: zhu_mingca@163.com