

# 利用泽尼克系数求取衍射光栅的分辨本领

于海利<sup>1,2</sup>, 齐向东<sup>1</sup>, 巴音贺希格<sup>1</sup>, 唐玉国<sup>1</sup>

1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033  
2. 中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘要** 光栅分辨本领检测设备的焦距通常达几米甚至十几米,采用直接测量法难度大、成本高,利用衍射波前间接求取光栅分辨本领是解决该问题的有效途径之一。在光栅光谱成像傅里叶变换理论基础上,建立了利用泽尼克多项式拟合系数求解衍射光栅分辨本领的归一化模型,揭示了光栅衍射波前与分辨本领的求取关系,提出了依据泽尼克多项式拟合系数求取衍射光栅分辨本领的新方法。根据该方法实测了一块衍射光栅的分辨本领,并与直接测量法进行对比测试。结果表明该方法误差小于4.42%,降低了分辨本领的测试难度,是衍射光栅分辨本领求取的有效手段,应用于ZYGO干涉仪等仪器中,通过简单的波前测试即可得到定量的衍射光栅分辨本领指标。

**关键词** 衍射光栅;分辨本领;衍射波前;泽尼克多项式

**中图分类号:** O433.4 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3964/j.issn.1000-0593(2012)01-0264-04

## 引言

近年来,随着高分辨探测器技术日益成熟<sup>[1]</sup>,极大地促进了光栅光谱仪在工业、农业、生物医药、食品卫生、国防安全等各领域中的应用<sup>[2-5]</sup>。衍射光栅是光谱仪器的核心色散元件,其分辨本领直接决定了光谱仪器的性能,为了适应光栅批量化生产、检验的需求,有必要开展便捷、低成本的衍射光栅分辨本领测量方法研究<sup>[6]</sup>。

目前,光栅分辨本领直接测量法主要有两种,分辨谱线对法和谱线半宽度测定法<sup>[7]</sup>。分辨谱线对法是在光栅使用波段范围内,拍摄选定的若干对已知元素的光谱,如果将这些谱线对区分,则可以根据谱线对宽度计算光栅分辨本领。该测定方法是一种半定量的测定法,因为所拍摄的谱线对或超精细光谱是有限的,光谱间隔也不一定很合适,只能说实际分辨本领优于此数,而不是最高分辨本领;谱线半宽度测定法是基于瑞利判据的一种测试方法,易于进行分辨本领的定量测量。在利用该方法获得确切的光栅分辨本领过程中,要求使用光谱线的线宽及测量线宽时引进的光谱仪器误差均远小于光栅实际分辨本领,这就使得测量仪器焦距通常长达几米甚至十几米。用于天文观测的大口径中阶梯光栅的分辨

本领测量,需要测量仪器口径近1 m<sup>[8]</sup>,加之很高的面型精度要求,测量仪器的制作变得极为困难、昂贵,测量很不方便。因此,光栅的制作和使用者试图找到一种光栅分辨本领间接测试的方法,可避免专用测试仪器的局限性。

光谱仪从原理上讲是对入射狭缝成像的过程,光栅的波前质量影响仪器的成像质量,决定了仪器能够达到的最高分辨本领。根据该原理,中国科学院长春光学精密机械与物理研究所为满足批量检测的要求,采用干涉测量法定性描述光栅分辨本领<sup>[9,10]</sup>。具体方法是,利用ZYGO干涉仪测试光栅衍射波前,如果莫尔条纹平直等距,则说明分辨本领高;反之,则说明分辨本领低,但无法得到确切值。鉴于此,开展了光栅衍射波前求解分辨本领的研究,并提出了利用泽尼克拟合系数求取光栅分辨本领的间接测量法。结果表明,该方法为光栅分辨本领的快速、定量测量提供了一种有效途径。

## 1 利用泽尼克拟合系数求取光栅分辨本领原理

### 1.1 分辨本领定量求取的归一化计算式

从麦克斯韦电磁方程组出发,基于严格的惠更斯原理和夫琅和费衍射公式<sup>[11]</sup>,可得利用光栅衍射波前用于求解衍

收稿日期:2011-03-21,修订日期:2011-06-21

基金项目:国家自然科学基金项目(60478034),国家创新方法工作专项项目(2008IM040700),国家重大科研装备研制项目(ZDY2008-1),吉林省科技发展计划项目(20070523,20086013),吉林省重大科技攻关项目(09ZDGG005)和长春市应用技术研究计划项目(08YJ07)资助

作者简介:于海利,1984年生,中国科学院长春精密机械与物理研究所博士研究生 e-mail: yuhailite@163.com

射谱分布的计算式

$$E_{p'}(k\alpha, k\beta) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikf}}{f} \iint_{\text{pupil}} E_0 e^{ik\Delta(x,y)} e^{i\beta(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (1)$$

式中  $\Delta(x, y)$  为光栅在光瞳中的波前差,  $\alpha$  和  $\beta$  是光瞳中相对  $p'$  点的方向余弦,  $f$  为系统焦距,  $E_{p'}$  是焦面上  $p'$  点衍射场的复振幅。该式在推导过程中有如下三个近似:

- (1) 衍射波前的电磁场向量  $E$  和  $H$  相切于波前;
- (2) 波长  $\lambda$  满足条件  $\lambda \ll f$ ;
- (3) 变换式适用于中心和半径为  $f$  半球面波前的中心附近。

衍射光栅通常工作在均匀介质中, 应用波长与焦距相差三个量级以上, 且在求解分辨本领时仅考虑衍射谱的近谱分布, 因此, 在光栅实际使用中满足上述三个近似条件。式(1)的物理意义为: 成像焦面内任一像点电场向量的复振幅, 等于光瞳内电场复振幅分布的傅里叶变换。该式建立起了光栅衍射波前与理想光谱成像的理论关系, 数值运算结果相当于直接测量法中拍摄到狭缝所成光谱像的谱线轮廓, 形象而言该式相当于一台“衍射光栅摄谱仪”。为使式(1)适用于计算机运算, 对其进行归一化处理。在光瞳内光栅衍射波前沿坐标  $x$  和  $y$  的宽度分别是  $W$  和  $L$ , 归一化坐标变量  $\eta$  ( $|\eta| \leq 1$ ),  $\xi$  ( $|\xi| \leq 1$ ) 由下式给出

$$\begin{cases} \eta = \frac{2x}{W} \\ \xi = \frac{2y}{L} \end{cases} \quad (2)$$

设归一化的衍射谱分布角坐标  $u$  和  $v$ , 由式(1)、式(2)可得

$$\begin{cases} A'(u, v) = c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\eta) e^{i(u\eta + v\xi)} d\eta d\xi \\ g(\eta) = E_0(\eta, \xi) e^{ik\Delta(\eta, \xi)} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $c$  为与  $\eta$  和  $\xi$  无关的常量,  $g(\eta)$  为光栅衍射波前。假定光栅为平面一维色散光栅, 衍射波前坐标  $\eta$  和衍射角谱坐标  $u$  沿光栅的色散方向, 归一化坐标  $u$  为

$$u = \pi \frac{X}{(\lambda/W)f} \quad (4)$$

$X$  是聚焦系统焦平面在色散方向( $X$  与  $W$  方向平行)的坐标。对于均匀闪耀的平面衍射光栅, 通常其衍射波前复振幅各点的幅值相等, 即  $E_0(\eta, \xi) = 1$ , 则衍射波前分布为

$$g(\eta) = e^{ik\Delta(\eta, \xi)} \quad (5)$$

根据式(3)、式(5)归一化振幅后可得

$$A(u, v) = \frac{c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{ik\Delta(\eta, \xi)} e^{i(u\eta + v\xi)} d\eta d\xi}{c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 d\eta d\xi} \quad (6)$$

整理式(6), 结合光强计算式, 可得光栅的衍射谱分布归一化形式为

$$\begin{cases} I = AA^* \\ A(u, v) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{ik\Delta(\eta, \xi)} e^{i(u\eta + v\xi)} d\eta d\xi \end{cases} \quad (7)$$

式(7)是利用归一化光栅波前坐标数值计算衍射谱分布的实际可用形式, 由该式可以看出在求解复振幅分布时不需

要了解具体的光栅参数, 如光栅的尺寸、光栅常数以及使用级次等, 只需给出归一化的波前误差  $\Delta(\eta, \xi)$  即可, 因此该式在计算时具有较好的普适性。

由式(7)可以计算得到理想波前衍射谱分布的第一极小半角坐标  $x_0$ , 称  $x_0$  为最小衍射单位, 有

$$x_0 = \frac{\lambda f}{W} \quad (8)$$

设  $\Delta u$  为式(7)所求解衍射谱分布的第一极小半角宽度, 依据瑞利判据, 利用式(4)和式(8)可得衍射光栅分辨本领计算式为

$$R.P = \frac{\Delta u}{\pi} \times 100\% \quad (9)$$

至此, 利用式(7)和式(9)即可通过光栅衍射波前求取定量的分辨本领指标。验证该计算式的正确性, 计算当光栅衍射波前具有 1 个波长倾斜的定量化分辨本领, 即  $\Delta(\eta, \xi) = \lambda\eta/2$ 。为观察方便, 将式(7)退化求解一维衍射图样复振幅分布, 即当  $v=0$  时可得

$$I(u) = \left( \frac{\sin(u + \pi)}{u + \pi} \right)^2 \quad (10)$$

绘制式(10)以及理想光栅衍射谱图如图 1 所示。从图中可以看出, 具有 1 波长倾斜的光栅, 其第一极小半角宽度为  $\pi$ , 则  $\Delta u = \pi$ 。根据式(9)计算得该光栅的分辨本领为  $R.P = 100\%$ 。这与实际情况相符合, 即当光栅仅有倾斜波前差时只影响衍射光的传播方向, 倾斜量的大小决定衍射光方向改变的大小, 并不影响光栅分辨本领。由上述分析可知式(7)和式(9)在应用于光栅某一级次上衍射图样的分辨本领计算时, 理论和实际存在良好的一致性, 在满足式(1)的近似条件下, 可作为衍射光栅分辨本领定量求解的方法。

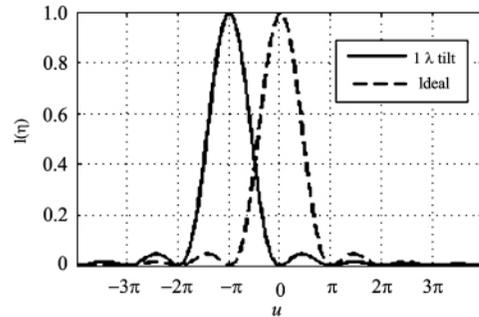


Fig 1 Diffraction spectral distribution of wavefront with  $1\lambda$  tilt or ideal

### 1.2 泽尼克多项式拟合系数求取分辨本领的模型

泽尼克多项式是在单位圆上的正交多项式, 由于泽尼克多项式对波前的拟合精度高, 并且与光学系统的塞德尔像差函数很容易建立联系, 被广泛应用于波前的计算与表征<sup>[12, 13]</sup>。泽尼克多项式为:  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ <sup>[14]</sup>, 拟合系数分别为:  $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ , 则光栅衍射波前差为

$$\Delta(\eta, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j Z_j \quad (11)$$

将(11)式代入(7)式得

$$\begin{cases} I = AA^* \\ A(u, v) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \prod_{j=1}^{\infty} e^{n_j Z_j} \right)^{ik} e^{i(\alpha\eta + \beta\xi)} d\eta d\xi \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  是固定项, 该式在实际应用中只需确定  $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$  即可在数值计算基础上得到光栅的衍射谱分布, 进而利用瑞利判据和式(9)求取定量的衍射光栅分辨本领, 具体实现过程如图 2 所示。ZYGO 干涉仪在进行光栅衍射波前测量时能够方便地给出前 36 项泽尼克多项式拟合系数, 通常 36 项的拟合精度已足够高。至此, 建立起利用泽尼克多项式拟合系数求取衍射光栅分辨本领的方法。光栅的干涉测量较易实现, 因此, 利用式(12)和式(9)间接求取定量的衍射光栅实际分辨本领的方法降低了分辨本领的测试难度和成本, 并使光栅批量测量成为可能。



Fig 2 Solving process of diffraction gratings' resolution

## 2 直接测量与间接测量对比测试

首先, 依据实验室现有条件, 利用分辨谱线对法重复 5 次测试有效面积为  $45 \times 45 \text{ mm}^2$ , 刻线密度为  $1\ 200 \text{ gr} \cdot \text{mm}^{-1}$ , -1 级闪耀的衍射光栅分辨本领。测试仪器为 4 m 焦距 Ebert 光栅分辨本领测试仪, 拍摄铁谱线光谱, 可明显分离波长相差  $0.007\ 4 \text{ nm}$  的  $309.997\ 1$  和  $309.989\ 7 \text{ nm}$  铁谱线对, 由此, 可计算得到该光栅的实测分辨本领为  $R.P_1 = 41\ 892$ 。

其次, 利用间接测量法测试该光栅的分辨本领。测试仪器为 ZYGO 干涉仪, 衍射光栅的 -1 级衍射波前测试结果如图 3 所示, 泽尼克多项式拟合系数如表 1 所示。将表 1 所示的 36 项泽尼克拟合系数代入(12)式计算衍射谱分布, 得出该光栅衍射谱第一极小的半宽度约为  $1.22\pi$ , 根据式(9)可得分辨本领为理想光栅的 82%。该光栅在 -1 级使用下的理想分辨本领为  $R.P_0 = 54\ 000$ , 则间接测试法测得的分辨本领为  $R.P_2 = 44\ 280$ 。利用伪彩色模拟该光栅分离间隔 1.22 的谱线对如图 4 所示, 由该图可明显看出分离的谱线对。

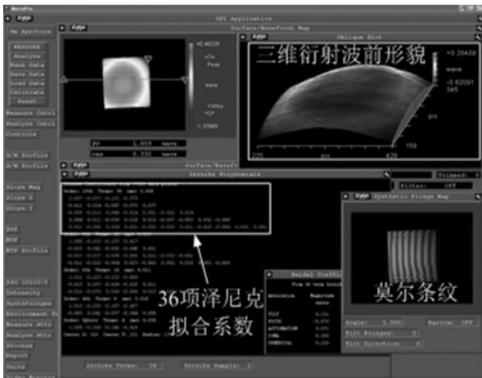


Fig 3 Wavefront and Zernike coefficients measured by ZYGO interferometer

长春光机所在光栅批量测量时依据图 3 中莫尔条纹定性

分析分辨本领, 该图中莫尔条纹较弯曲、疏密程度不一致, 被定为性能较差的光栅。现在, 通过间接测试法, 可以定量给出其分辨本领为 82%, 低于 90%, 性能较差。

Table 1 Zernike fitting coefficients measured by ZYGO interferometer

Term	Coefficients	Term	Coefficients	Term	Coefficients
0	1.027	12	-0.014	24	-0.008
1	-0.237	13	0.001	25	0.011
2	-0.191	14	-0.022	26	-0.056
3	-0.375	15	0.014	27	0.034
4	-0.011	16	0.064	28	0.021
5	0.034	17	0.011	29	-0.020
6	-0.047	18	-0.039	30	-0.020
7	-0.073	19	0.028	31	0.011
8	0.037	20	0.015	32	-0.010
9	-0.058	21	-0.007	33	-0.004
10	-0.013	22	-0.003	34	0.020
11	0.049	23	0.032	35	0.001

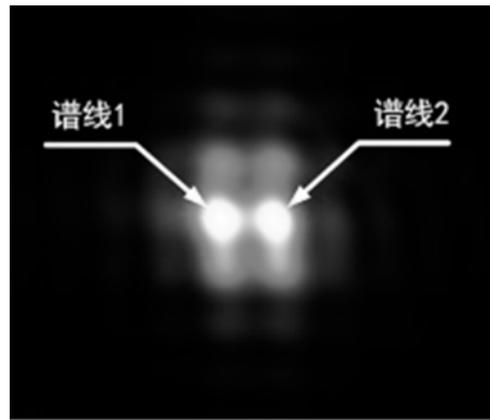


Fig 4 Simulation of separated diffraction spectra

对比间接测量值  $R.P_2$  和直接测量值  $R.P_1$  可得相对理想值的测量误差为

$$err = \frac{R.P_2 - R.P_1}{R.P_0} \times 100\% = 4.42\% \quad (13)$$

由  $err > 0$  可知, 间接法测试的光栅分辨本领略高于直接测量法, 主要有两方面原因: 第一, 分辨谱线对法分离的铁谱波长是固定的, 只能说明实际分辨本领优于测量值; 第二, 直接测量法受限于仪器精度, 降低了所测光栅的分辨本领。因此, 间接测量法的误差低于 4.42%。

通过以上对比实验和分析可知, 利用泽尼克拟合系数求取衍射光栅分辨本领的方法可以作为衍射光栅分辨本领的间接测试手段, 测试方法简单、对仪器依赖程度低, 并具有较高的测量精度。

## 3 结 论

本工作建立了光栅二维衍射波前求解衍射谱分布的归一

化计算式,给出了利用泽尼克拟合系数定量求取衍射光栅分辨本领的方法,从而光栅测试人员可不再需要根据经验判断莫尔条纹好坏,以确定光栅性能的优劣。该方法为分辨本领间接测试方法,与直接测量法对比分析可得出以下结论:第一,在建立准确的光栅衍射波前泽尼克拟合系数基础上,该方法具有较小的测量误差,实验结果表明误差小于 4.22%;

第二,该方法避免了直接测量法仪器精度引起的测量误差;第三,该方法解决了分辨谱线对法仅能拍摄有限谱线对的问题,从而给出更合理的光栅分辨本领指标;第四,对比直接测量法,该方法不需要昂贵的专用测试设备,利用 ZYGO 干涉仪等光栅衍射波前测试仪,即可方便、快速、准确地得到光栅分辨本领指标。

## References

- [ 1 ] GUO Liang, WU Qing-wen, YAN Chang-xiang, et al(郭亮,吴清文,颜昌翔,等). Optics and Precision Engineering(光学精密工程), 2010, 18(11): 2375.
- [ 2 ] TANG Yu-guo, SONG Nan, Bayanheshig, et al(唐玉国,宋楠,巴音贺希格,等). Optics and Precision Engineering(光学精密工程), 2010, 18(9): 1989.
- [ 3 ] Chase A Munson, Jennifer L Gottfried, Emily Gibb Snyder, et al. Appl. Opt., 2008, 47(31): G48.
- [ 4 ] YANG Yue-zhong, CAO Wen-xi, SUN Zhao-hua, et al(杨跃忠,曹文熙,孙兆华,等). Acta Optica Sinica(光学学报), 2009, 29(1): 102.
- [ 5 ] XUE Qing-sheng, WANG Shu-rong, LI Fu-tian, et al(薛庆生,王淑荣,李福田,等). Optics and Precision Engineering(光学精密工程), 2010, 18(4): 823.
- [ 6 ] ZHAO Cui-cui, NI Zheng-ji, ZHANG Da-wei, et al(赵翠翠,倪争技,张大伟,等). Laser Journal(激光杂志), 2010, 31(6): 1.
- [ 7 ] ZHU Shao-ji, ZOU Hai-xing, BAO Xue-cheng, et al(祝绍箕,邹海兴,包学诚,等). Diffraction Gratings(衍射光栅). Beijing: China Machine Press(北京:机械工业出版社), 1986. 355.
- [ 8 ] Panchuk V E, Klochkova V G, Yushkin M V, et al. J. Opt. Technol., 2009, 76(2): 87.
- [ 9 ] Stroke G W. Diffraction Gratings, Encyclopedia of Physics, 1967, X IV.
- [ 10 ] SUN Jing-chun, YANG Hou-min(孙景椿,杨厚民). Optics and Precision Engineering(光学精密工程), 1980, (4): 20.
- [ 11 ] YU Dao-yin, TAN Heng-ying(郁道银,谈恒英). Engineering Optics(工程光学). Beijing: China Machine Press(北京:机械工业出版社), 2006.
- [ 12 ] Sergio V M. Appl. Opt., 2002, 41: 3448.
- [ 13 ] Bayanheshig, SHAO Xian-xiu, CUI Ji-cheng, et al(巴音贺希格,邵先秀,崔继承,等). Optics and Precision Engineering(光学精密工程), 2011, 19(1): 56.
- [ 14 ] Kim C J, Shannon R R. Applied Optics and Optical Engineering, Vol. X, Chapter 4. San Diego, CA: Academic Press, 1987.

# Solving Resolution of Diffraction Gratings Using Coefficients of Zernike Polynomials

YU Hai-li<sup>1,2</sup>, QI Xiang-dong<sup>1</sup>, Bayanheshig<sup>1</sup>, TANG Yu-guo<sup>1</sup>

1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** It is hard and costly to test resolution directly, because the focal length of testing equipment could be nearly ten meters. Solving resolution by diffraction wavefront aberration indirectly is an effective solution to this problem. A normalization model of solving resolution using fitting coefficients of Zernike polynomials was established based on the spectral imaging theory of Fourier optics. The relationship between resolution and wavefront aberration of diffraction gratings was illustrated by this model. Finally, a new method of testing resolution using fitting coefficients of Zernike polynomials was proposed. According to this method, the resolution of a grating is tested by ZYGO interferometer indirectly. Compared with direct method, results indicate that the error of indirect method is less than 4.22%, and this method could be an effective way to avoid the difficulty of direct method to solve resolution. Meanwhile, this method can be used in ZYGO interferometer to solve resolution by wavefront testing easily.

**Keywords** Diffraction grating; Resolution; Diffraction wavefront; Zernike polynomial

(Received Mar. 21, 2011; accepted Jun. 21, 2011)