

# 经纬仪坐标变换中的偏差分析

Bias in Coordinate Transformation of Theodolite

(1.长春光学精密机械与物理研究所;2.中科院研究生院)葛兵<sup>1,2</sup> 高慧斌<sup>1</sup> 高策<sup>1</sup>  
GE BING GAO HUIBIN GAO CE

摘要:测量数据的非线性坐标变换会引入偏差,如果不纠正这种偏差,会影响变换参数估计的统计精度。本文分析了这种偏差对目标跟踪的影响,预算了经纬仪球面坐标系下的测量值即方位角、俯仰角、距离,变换到直角坐标系下的(X, Y, Z)所引入的偏差量。并用 Matlab 仿真了测量值统计分布对于变换值系统误差大小的影响。

关键词:偏差;坐标变换;统计分布

中图分类号:U666.12 文献标识码:A

Abstract: Transformations of data from one coordinate system to another can introduce bias errors. These biases, unless corrected, can affect the statistical fidelity of parameter estimate. This paper estimates the effect of such biases on three-dimensional tracking of targets, and computes the transformation deviations from sensor measurement coordinates (range, elevation angle, azimuth) to Cartesian x-y-z coordinates, emulates the effect of measurement statistic distribution on system biases of transformation.

Key words: biases, coordinate transform, statistic distribution

技术创新

## 1 引言

在目标跟踪和光学测量过程中,经常用到坐标变换。例如在现代化靶场中,经纬仪、雷达等先进的测量手段都是在球面坐标系下测量目标的方位角、俯仰角,而我们在对目标进行截取、轨迹分析时,一般是在直角坐标系下,所以需要在球面坐标和直角坐标之间进行变换。

测量值的坐标变换在数据分析中是标准的过程。变换方程(例如由球面坐标系到直角坐标系)是固定不变的。如果测量值存在随机误差,在非线性坐标变换中就会导致变换值中存在严重的偏差。

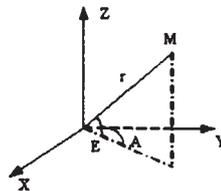
例如:  $X$  是随机变量,  $f$  是变换方程,期望值  $E(f(x))$  与  $f(E(x))$  一般是不相等的,因此,  $X$  的随机测量值  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 经变换得到的统计量  $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  不一定是  $f(X)$  无偏估计。这种偏差在映射变换中不存在。即  $X \rightarrow AX+B$ , 其中  $X$  是  $n$  维向量,  $A$  是已知的  $n \times n$  矩阵,  $B$  是  $n$  维常向量。当矩阵  $A$  是固定不变时,这种变换是坐标平移;当  $B=0, A$  正交时,为坐标旋转。这两种坐标变换都不会引入偏差。

## 2 经纬仪测量值

假设经纬仪的位置固定不变,目标在球坐标测量值是方位角  $A$ 、俯仰角  $E$ ,测距机测量目标距离  $r$ ,如图 1。目标位置也可以用直角坐标来表示。以经纬仪位置为原点建立直角坐标,  $X$  轴—指向正北,  $Y$  轴—指向正东,  $Z$  轴—根据右手定则确定。目标位置在这一坐标系下表示为  $(X, Y, Z)$ ,与球面坐标  $(r, E, A)$  的关系为公式 1。这种变换是非线性变换,测量值如果存在误差,变换值会引入偏差。

葛兵: 硕士研究生

基金项目:中科院科研资助项目(X04Q01Z)



$$\begin{aligned} X &= r \cos E \cos A \\ Y &= r \cos E \sin A \\ Z &= r \sin E \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

图 1

经纬仪测量得到的目标位置为  $(\hat{r}, \hat{A}, \hat{E})$  与目标的真实位置  $(r, A, E)$  的偏差为  $(\xi_r, \xi_A, \xi_E)$ , 假设它们相互独立并满足高斯分布,均值为零,方差分别为  $(\sigma_r^2, \sigma_A^2, \sigma_E^2)$ 。经纬仪测量值变换到直角坐标系下,得到  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  与目标位置真实值  $(X, Y, Z)$  误差项为  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ , 因为球面坐标下测量误差  $(\xi_r, \xi_A, \xi_E)$  是均值为零的高斯分布,所以  $(\hat{r}, \hat{A}, \hat{E})$  是  $(r, A, E)$  的无偏估计量。但是由于由球面坐标系到直角坐标系的变换是非线性的,  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  的均值不再为零。也就是说  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  不是  $(X, Y, Z)$  的无偏估计,即  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  中存在系统误差。本文详细论述了纠正这种系统误差的方法,计算期望值  $E(\xi_x), E(\xi_y), E(\xi_z)$ , 用  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  分别减去期望值得到  $(X_{ob}, Y_{ob}, Z_{ob})$  就是  $(X, Y, Z)$  的无偏估计量。还可以计算方差出  $D(X), D(Y), D(Z)$  和协方差  $D(XY), D(YZ), D(ZX)$ 。

$$D(X) = E[(X - X_{ob})^2] \quad D(XY) = E[(X - X_{ob})(Y - Y_{ob})]$$

其它参数相同。协方差不为零,表示  $(X, Y, Z)$  之间相互不独立

## 3 计算方法

### 3.1 测量误差的三角函数期望值计算

因为  $\xi_r$  满足高斯分布,由对称性得到  $\sin \xi_r, \cos \xi_r \sin \xi_r$  的期望值都为零。计算  $E(\cos \xi_r)$ : 设  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos au}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2\sigma_r^2} du$  微分得到:  $\frac{dI}{dt} = -\sigma_r^2 a I$  则  $I = A e^{-2\sigma_r^2 a^2/2A}$  是与  $a$  相互独立的常数,令  $a=0$  则  $A=1$  令  $a=1$  得到  $E(\cos \xi_r) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_r^2}$ 。其它的函数期望值由这个导出。例如:  $E(\cos^2 \xi_r) = E(\frac{1}{2}(1 + \cos 2E)) = 0.5(1 + e^{-\frac{1}{2}(2\sigma_r)^2}) = 0.5(1 + e^{-2\sigma_r^2})$

公式(2)列出了本文推导过程中所用到的期望公式:

$$E(\cos \xi_E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2\sigma_E^2} du = e^{-\frac{1}{2}\sigma_E^2}$$

$$E(\cos(E + \xi_E)) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_E^2} \cos E \quad E(\sin(E + \xi_E)) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_E^2} \sin E$$

$$E(\cos^2 \xi_E) = 0.5(1 + e^{-2\sigma_E^2}) \quad E(\sin^2 \xi_E) = 0.5(1 - e^{-2\sigma_E^2})$$

$$E(\cos^2(E + \xi_E)) = 0.5(1 + e^{-2\sigma_E^2} \cos 2E)$$

$$E(\sin^2(E + \xi_E)) = 0.5(1 - e^{-2\sigma_E^2} \cos 2E)$$

$$E(\cos(E + \xi_E) \sin(E + \xi_E)) = \cos E \sin E e^{-\frac{1}{2}\sigma_E^2} \dots \dots (2)$$

### 3.2 变换值误差期望值的计算

误差为测量值与真实值之差即:  $\xi_X = \hat{X} - X$   $\xi_Y = \hat{Y} - Y$   $\xi_Z = \hat{Z} - Z$   
 $\hat{X} = \hat{r} \cos \hat{E} \cos \hat{A}$

$$X = r \cos E \cos A = (\hat{r} - \xi_r) \cos(\hat{E} - \xi_E) \cos(\hat{A} - \xi_A)$$

Y、Z 参数同 X。导出系统误差公式为:

$$\xi_X = \hat{r} \cos \hat{E} \cos \hat{A} - (\hat{r} - \xi_r) \cos(\hat{E} - \xi_E) \cos(\hat{A} - \xi_A)$$

$$\xi_Y = \hat{r} \cos \hat{E} \sin \hat{A} - (\hat{r} - \xi_r) \cos(\hat{E} - \xi_E) \sin(\hat{A} - \xi_A)$$

$$\xi_Z = \hat{r} \sin \hat{E} - (\hat{r} - \xi_r) \sin(\hat{E} - \xi_E)$$

$\xi_r, \xi_A, \xi_E$  相互独立,由公式(1)很容易导出期望值为:

$$E(\xi_X) = \hat{r} \cos \hat{E} \cos \hat{A} (1 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_r^2 - \frac{1}{2}\sigma_A^2})$$

$$E(\xi_Y) = \hat{r} \cos \hat{E} \sin \hat{A} (1 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_r^2 - \frac{1}{2}\sigma_A^2}) \dots \dots (3)$$

$$E(\xi_Z) = \hat{r} \sin \hat{E} (1 - e^{-\frac{1}{2}\sigma_r^2})$$

## 4 应用 Matlab&Simulink 进行仿真试验

如图 2 所示,令目标真实位置为  $\hat{r}=200\text{km}$ ,  $\hat{A}=30\text{deg}$ ,  $\hat{E}=20\text{deg}$ ,  $r_1, A_1, E_1$  为测量值,是在真实值上叠加了测量误差,这里取为白噪声,测量误差的方差取为  $\sigma_A = \sigma_E = 10\text{milrad}$ ,  $\sigma_r = 2\text{m}$ 。把真实值和测量值分别经过坐标变换得到直角坐标系下目标的位置,结果相减就得到了坐标变换的偏差。分别存在 biasX.mat, biasY.mat, biasZ.mat 文件中。应用 Matlab 画图得到图 3、4,清楚地显示了测量误差 ( $\xi_r, \xi_E, \xi_A$ ) 的统计分布对于直角坐标系下(X,Y,Z)的系统误差的影响。图 3 固定了  $\sigma_E, \sigma_r$ , 改变  $\sigma_A$ , 图 4 固定了  $\sigma_r, \sigma_A$ , 改变  $\sigma_E$ 。

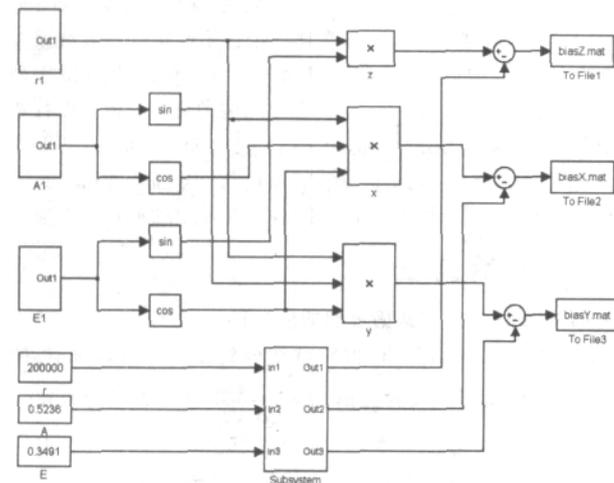


图 2 Simulink 仿真坐标变换框图

可以看出在直角坐标系中, (X, Y, Z) 的误差期望值随

$\sigma_A, \sigma_r$  的增大逐渐增大。在公式(3)中可以看到  $E(\xi_X), E(\xi_Y), E(\xi_Z)$  与  $\sigma_r$  无关,因此距离的测量误差的统计分布不会影响变换误差的期望值。当  $\sigma_A = \sigma_E = 10\text{milrad}$ ,  $\sigma_r = 2\text{m}$  时, X 轴偏差约为 15m, Y 轴偏差约为 10m。

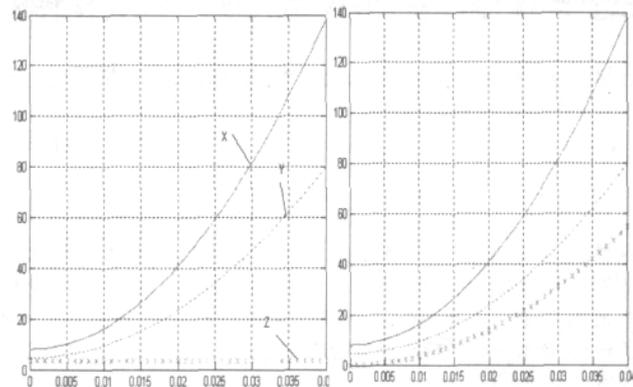


图 3

图 4

## 5 结论

虽然与经纬仪到目标距离相比坐标变换引起的误差很小,但是如果不正,会严重影响跟踪测量的精度,在目标截取等任务中可能会导致任务的失败。

本文创新点:本文应用数理统计的基本方法,定性的分析出非线性坐标变换会改变数据的统计分布,定量的计算出坐标变换对数据影响的大小。并且应用 Matlab&Simulink 进行仿真出变换值误差随测量值误差增大而增大。

### 参考文献

- [1]李忠范,高文森,数理统计与随机过程,吉林大学出版,第1版。
- [2]Jianli Wang, Chen.Tao, Method to improve the capability of electro-optical theddlite to track fast moving target, SPIE, Vol. 4564(2001).
- [3]Sensor Line of Sight Stabilization Prepared by: C. James Cooper, P. Eng.Executive Vice President IsteC Incorporated for The International Society for Optical Engineering, SPIE, 1991, 1948:39-51
- [4]倪永勤,孙昭洪,李茂泉等,偶然误差统计规律虚拟实验与数据处理[J]微计算机信息, 2006,3—1:P183-185.

作者简介:葛兵,女,汉族,出生于1982年12月,吉林人,中国科学院长春光学精密机械与物理研究所,硕士研究生,主要从事伺服控制系统研究;高慧斌,男,博士生导师,研究员.主要从事经纬仪控制系统的研究。

Biography:Gebing, female, Han nationality, born in Dec. 1982, master of Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, major in servo-control system; Gao huibin, male, doctor graduate teacher, a researcher, engaging in research of theoddlite control system.

(130033 吉林 长春光学精密机械与物理研究所)葛兵 高慧斌 高策 (130033 吉林 中科院研究生院)葛兵

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics) Ge Bing Gao Huibin Gao Ce

(Graduate School of Chinese Academy of Science)Ge Bing 通讯地址:(130033 吉林 吉林省长春市东南湖大路16号长春光机所光电测控部伺服组)葛兵

(收稿日期:2007.3.3)(修稿日期:2007.4.5)