

板球系统的非线性自适应控制

王红睿, 田彦涛, 隋振, 孙瑞东

(吉林大学通信工程学院, 长春 130022)



摘要: 针对球半径、球质量、球转动惯量未知的板球系统, 提出了其非线性自适应控制方法。建立了包括球板间摩擦、传动机构、步进电机等环节的板球系统数学模型。结合 Lyapunov 稳定性理论设计了非线性位置控制器和非线性自适应位置控制器。提出的控制方法经过了仿真验证。跟踪控制结果表明与模糊控制相比, 非线性自适应控制方法提高了板球系统的控制精度。

关键词: 非线性控制; 板球系统; Lyapunov 直接方法; 自适应控制; 仿真建模

中图分类号: TP271.62 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-731X (2010) 05-1251-06

Nonlinear Adaptive Control for Ball and Plate System

WANG Hong-rui, TIAN Yan-tao, SUI Zhen, SUN Rui-dong

(School of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: Nonlinear adaptive control method for ball and plate system was proposed while radius of the ball, mass of the ball and inertia of the ball are unknown. Mathematical model of the ball and plate system was built including friction between the ball and plate, transmission sets and step motors. Nonlinear position controller and nonlinear adaptive position controller was designed based on Lyapunov stability theory. The proposed control methods were evaluated by simulations. Simulation results indicate that nonlinear adaptive control method improves control precision for the ball and plate system, compared with fuzzy control method.

Key words: nonlinear control; ball and plate system; Lyapunov direct approach; adaptive control; modeling and simulation

引言

板球系统是球杆系统的二维扩展, 其执行器的数目小于系统自由度的数目。板球系统的控制包括镇定控制和跟踪控制。由于球 X 和 Y 方向的运动耦合作用, 和球杆系统相比板球系统的控制更为复杂。尤其在高速的跟踪控制中, 系统表现出的较强非线性给控制器设计带来了挑战。文献[2]的根轨迹方法仅适用于镇定控制, 但难以用在跟踪控制中。文献[3]的模糊控制方法由于未考虑板球系统模型, 控制精度有限。文献[4]采用了滑模控制方法, 系统中大部分的非线性项被忽略了。文献[5]的反步设计法, 在控制器设计中没有考虑板球间的摩擦、球 X 和 Y 方向的运动耦合作用。一方面, 上述方法在控制器设计中仅考虑了系统的简化模型, 未建立包括球在平板上运动、球板间摩擦、传动机构、电机动态等环节的较完整系统模型^[1-5]。以简化系统模型来设计控制器可能导致控制精度下降。另一方面, 基于系统模型的控制方法均假设球的半径、球的质量、球的转动惯量是已知的, 未考虑球参数的不确定性^[4,5]。虽然模糊控制方法可回避球参数的不确定性问题, 但其控制精度较差。当球的参数未知时,

如何在基于系统模型的控制器的设计上去除球参数的不确定性影响还是一个有待解决的问题。建立包括球在平板上运动、球板间摩擦、传动机构、电机动态等环节的系统模型, 并由此模型来设计控制器对缩小仿真系统和实际系统的差距、提高控制精度具有重要意义。

为提高板球系统跟踪控制的精度, 分析了球在平板上运动、球板间摩擦、传动机构、电机动态等环节的特性, 建立了包括上述各环节的较为完整的板球系统的非线性模型, 开发了板球系统的仿真平台。当球的半径、质量、转动惯量已知时, 由 Lyapunov 直接方法设计了位置控制器; 当球的半径、质量、转动惯量均未未知时, 提出了板球系统非线性自适应控制器的设计方法。最后由仿真检验了提出方法的有效性。

1 板球系统的模型

板球系统 BPVS-JLU I^[3]的控制结构见图 1。板球系统的控制器采用双反馈环结构, 分为位置控制器和伺服控制器^[3]。平板的期望倾角由位置控制器决定; 伺服控制器则拖动

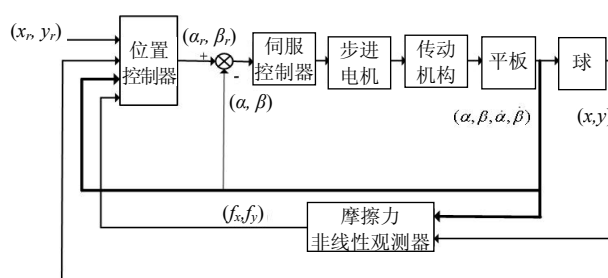


图1 板球系统的控制原理

收稿日期: 2008-09-19

修回日期: 2008-11-25

基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (20060183006); 吉林大学“985工程”研究生创新基金 (20080212)。

作者简介: 王红睿(1980-), 男, 吉林长春人, 博士生, 研究方向为非线性控制、欠驱动控制系统; 田彦涛(1958-), 男, 吉林长春人, 教授, 研究方向为复杂系统建模、优化与控制; 隋振(1970-), 男, 吉林公主岭人, 副教授, 研究方向为复杂系统建模、优化与控制; 孙瑞东(1962-), 女, 吉林长春人, 高级工程师, 研究方向为非线性控制。

平板到期望的倾角。伺服控制系统由两相混合式步进电机及其驱动器、蜗杆传动装置等部件组成。系统模型可分为球在平板上运动、球板间摩擦、传动机构、步进电机等环节。

1.1 球在平板上运动的模型

图 2 为系统的坐标示意图。假设球和板始终接触，忽略球绕 z 轴的旋转运动，且球在平板上始终滚动，而没有滑动。球和平板组成的质点系共有 4 个自由度。选取球 X 方向上的位移 x (m)、球 Y 方向上的位移 y (m)、平板 X 轴与水平面的倾斜角 α (rad)、平板 Y 轴与水平面的倾斜角 β (rad) 为广义坐标。球的质量、半径、转动惯量分别为 m 、 r 、 I_b ，重力加速度为 g 。平板绕其 X 轴及 Y 轴的转动惯量分别为 I_{px} 及 I_{py} 。由虚功原理计算广义力或者广义力矩^[3]。广义坐标 x 对应的广义力 Q_x ， y 对应的广义力 Q_y 分别为

$$Q_x = -mg \sin(\alpha) + f_x \quad (1)$$

$$Q_y = -mg \sin(\beta) + f_y \quad (2)$$

其中 f_x (N) 和 f_y (N) 分别为球在板 X 方向和 Y 方向受到的摩擦力^[6]。广义坐标 α 对应的广义力矩 Q_α 和广义坐标 β 对应的广义力矩 Q_β 分别为

$$Q_\alpha = \tau_x - mgx \cos \alpha \quad (3)$$

$$Q_\beta = \tau_y - mgy \cos \beta \quad (4)$$

其中 τ_x 是驱动平板绕其 Y 轴旋转的力矩， τ_y 是驱动平板绕其 X 轴旋转的力矩。

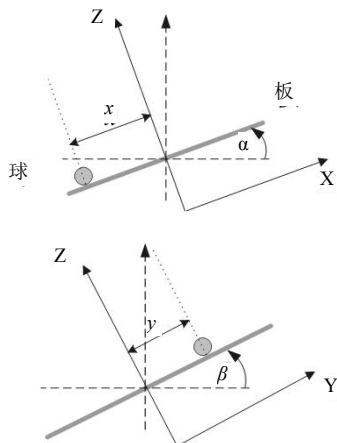


图 2 板球系统的坐标

由拉格朗日方程，得到板球系统的动力学方程组为

$$(m + I_b / r^2) \ddot{x} - m\dot{x}\dot{\alpha}^2 - m\dot{y}\dot{\alpha}\dot{\beta} + mg \sin \alpha - f_x = 0 \quad (5a)$$

$$(m + I_b / r^2) \ddot{y} - m\dot{y}\dot{\beta}^2 - m\dot{x}\dot{\alpha}\dot{\beta} + mg \sin \beta - f_y = 0 \quad (5b)$$

$$(I_{px} + I_b + m\dot{x}^2) \ddot{\alpha} + 2m\dot{x}\dot{\alpha}\dot{\beta} + m\dot{y}\dot{\beta}^2 + m\dot{x}\dot{y}\dot{\beta} + mgx \cos \alpha = \tau_x \quad (5c)$$

$$(I_{py} + I_b + m\dot{y}^2) \ddot{\beta} + 2m\dot{y}\dot{\alpha}\dot{\beta} + m\dot{x}\dot{\alpha}^2 + m\dot{x}\dot{y}\dot{\alpha} + mgy \cos \beta = \tau_y \quad (5d)$$

选取系统的状态变量如下

$$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \alpha, \dot{\alpha}, y, \dot{y}, \beta, \dot{\beta}]^T$$

由系式(5)，得到系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = k(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4^2 + \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8 - g \sin \mathbf{x}_3 + \frac{f_x}{m})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_4 = k_r \{ & (I_{py} + I_b + m\dot{x}^2) \tau_x - m\dot{x}_1 \dot{x}_5 \tau_y - \\ & m(I_{py} + I_b)(g\dot{x}_1 \cos \mathbf{x}_3 + 2\dot{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_8) - \\ & m^2 \mathbf{x}_5 [g\dot{x}_1 \mathbf{x}_5 (\cos \mathbf{x}_3 - \cos \mathbf{x}_7) + 2\dot{x}_1 \mathbf{x}_5 (\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_8) + \\ & (\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4)(\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_6)] \} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = \mathbf{x}_6$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6 = k(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8^2 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_8 - g \sin \mathbf{x}_7 + \frac{f_y}{m})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_7 = \mathbf{x}_8$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_8 = k_r \{ & (I_{px} + I_b + m\dot{y}^2) \tau_y - m\dot{x}_1 \dot{x}_5 \tau_x - \\ & m(I_{px} + I_b)(g\dot{x}_1 \cos \mathbf{x}_7 + 2\dot{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_8 + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_4) + \\ & m^2 \mathbf{x}_5 [g\dot{x}_1 \mathbf{x}_5 (\cos \mathbf{x}_3 - \cos \mathbf{x}_7) + 2\dot{x}_1 \mathbf{x}_5 (\mathbf{x}_6 \mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4) + \\ & (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8)(\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_6)] \} \end{aligned}$$

其中 k 是和球相关的常数， k_r 为时变量。球 X 和 Y 方向的运动耦合项分别为 $\mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_8$ 和 $\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_8$

$$k = \frac{mr^2}{mr^2 + I_b} \quad (7)$$

$$k_r = \frac{1}{(I_{px} + I_b)(I_{py} + I_b) + m\dot{x}_1^2(I_{py} + I_b) + m\dot{x}_5^2(I_{px} + I_b)} \quad (8)$$

1.2 球板间的摩擦

将摩擦力作为额外的状态变量，在扩展的状态空间中以观测器来估计摩擦力^[6]。选择扩展系统的状态变量如下

$$\mathbf{s} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, f_x, \dot{f}_x, f_y, \dot{f}_y]^T$$

假设球在平板上始终滚动而没有滑动，球板间的摩擦力变化缓慢并满足一定阶次的随机散步模型^[6]，由式(5a) (5b) 得到扩展系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 \\ k(\mathbf{s}_1 \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{s}_3) + p \mathbf{s}_5 - k u_x \\ \mathbf{s}_4 \\ k(\dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3 \dot{\beta}^2) + p \mathbf{s}_7 - k u_y \\ \mathbf{s}_6 \\ 0 \\ \mathbf{s}_7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中的参数为

$$p = \frac{r^2}{mr^2 + I_b} \quad (10)$$

$$u_x = g \sin \alpha \quad (11)$$

$$u_y = g \sin \beta \quad (12)$$

针对系统(9)构造扩展 Kalman 滤波器可估计变化较为缓慢的摩擦。关于摩擦观测器的更多细节见文献[6]。

1.3 步进电机的模型

假设步进电机的步距角恒定且其不超载运行，则有

$$\theta(n) = \sum_{n=1}^N p(n) \theta_b \quad (13)$$

其中 θ 为转子齿中心线与水平面的夹角, θ_b 为步进电机的步距角, $p(n)$ 为时刻 n 发送给步进电机的脉冲数。

假设两相混合式步进电机定子和转子的气隙均匀, 定子轭部和极身的磁导无穷大。忽略涡流、磁滞、磁场饱和的影响及永磁体回路、定子极间和端部的漏磁^[7]。两相混合式步进电机产生的电磁转矩 T_m 为^[7]

$$T_m = \frac{4N_s\Phi_m\Lambda_1z_rI}{3\Lambda_0k_\sigma}\sin(z_r\theta - \frac{2\pi}{3})\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{4}) \quad (14)$$

其中 N_s 为步进电机定子单极上的绕组匝数, Φ_m 为磁钢磁通, Λ_1 为气隙磁导的基波分量幅值, z_r 为转子齿数, I 为步进电机单相驱动电流的有效值, Λ_0 为气隙磁导的恒定分量, k_σ 为漏磁系数, ω 为驱动电流的角速度, φ 为相角。

1.4 传动机构的模型

X 方向和 Y 方向的传动机构采用相同的蜗杆传动装置。由于蜗杆传动装置存在间隙, 其输出转矩受到迟滞非线性的影响^[8]。仅以 X 方向的蜗杆装置说明。忽略电机轴及传动装置的摩擦转矩, X 方向蜗杆传动装置的输出转矩, 即驱动平板绕其 Y 轴旋转的力矩 τ_x 的连续时间域表达式为

$$\tau_x = \begin{cases} m_x T_{mx} & \text{if } \dot{\theta}_x > 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m_x} + b_{rx} \\ m_x T_{mx} & \text{if } \dot{\theta}_x < 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m_x} + b_{lx} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

其中 m_x 为 X 方向蜗杆装置的传动比, T_{mx} 为 X 方向步进电机的电磁转矩, T_{mx} 的特性见式(14), θ_x 为 X 方向步进电机转子齿中心线与水平面的夹角, b_r 为蜗杆装置的右间隙, b_l 为蜗杆装置的左间隙, θ_{xd} 为 X 方向蜗杆装置从动部分旋转角度, θ_{xd} 动态方程为^[8]

$$\dot{\theta}_{xd}(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} \dot{\theta}_x & \text{if } \dot{\theta}_x > 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m} + b_{rx} \text{ or} \\ & \text{if } \dot{\theta}_x < 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m} + b_{lx} \\ 0 & \text{if } \dot{\theta}_x = 0 \\ g(\tau, t) & \text{if } \dot{\theta}_x > 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m} + b_{lx} \\ -g(\tau, t) & \text{if } \dot{\theta}_x < 0, \theta_{xd} = \frac{\theta_x}{m} + b_{rx} \end{cases} \quad (16)$$

其中 $g(\tau, t)$ 为

$$g(\tau, t) = \delta(\tau - t)(b_{rx} - b_{lx}) \quad (17)$$

其中 $\delta(t)$ 为 Dirac 函数。同理, τ_y 的连续域时间表达式为

$$\tau_y = \begin{cases} m_y T_{my} & \text{if } \dot{\theta}_y > 0, \theta_{yd} = \frac{\theta_y}{m} + b_r \\ m_y T_{my} & \text{if } \dot{\theta}_y < 0, \theta_{yd} = \frac{\theta_y}{m} + b_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

其中 m_y 为 Y 方向蜗杆装置的传动比, T_{my} 为 Y 方向步进电机的

电磁转矩, θ_y 为 Y 方向步进电机转子齿中心线与水平面的夹角。

2 系统控制器设计

和文献[1]的球杆系统及文献[5]的板球系统控制方法类似, 利用平板角速度等信息来设计状态反馈控制器。目的是使球的位移 x 、 y 分别跟踪参考信号 x_r 、 y_r 。

假设 1 参考信号 x_r 、 y_r 及两者的一阶时间导数、二阶时间导数均为已知的、连续的、有界的。

以球 X 及 Y 方向的平均位置偏差 x_e 、 y_e 来描述系统在时间段 $[t_1, t_2]$ 内 X 及 Y 方向轨迹跟踪控制的精度。

$$x_e = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x_r(t)| dt \quad (19)$$

$$y_e = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |y(t) - y_r(t)| dt \quad (20)$$

2.1 球参数已知时的位置控制器设计

若球的半径、质量、转动惯量均已知, 则参数 k 、 p 是确定的。选取球在平板上运动的系统控制 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}c_1(x - x_r)^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x} - \dot{x}_r)^2 + \frac{1}{2}c_3(y - y_r)^2 + \frac{1}{2}c_4(\dot{y} - \dot{y}_r)^2 \quad (21)$$

其中 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 为大于 0 的待设计参数。

系统控制 Lyapunov 函数 V 的时间导数为

$$\dot{V} = (\dot{x} - \dot{x}_r)[c_2k(x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y) + c_2pf_x + c_1(x - x_r) - c_2\ddot{x}_r - c_2ku_x] + (\dot{y} - \dot{y}_r)[c_4k(y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x) + c_4pf_y + c_3(y - y_r) - c_4\ddot{y}_r - c_4ku_y] \quad (22)$$

引入辅助的切换变量 s_x 、 s_y

$$s_x = \dot{x} - \dot{x}_r \quad (23)$$

$$s_y = \dot{y} - \dot{y}_r \quad (24)$$

为保证 Lyapunov 函数时间导数的负定性或半负定性, 并且确保系统在有限的时间内趋近切换平面 $s_x = 0$ 、 $s_y = 0$, 选取反馈控制律 u_x 、 u_y 如下

$$u_x = \frac{c_1}{c_2k}(x - x_r) + x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y + \frac{pf_x}{k} - \frac{\ddot{x}_r}{k} + \frac{\lambda_x}{c_2k}\text{sign}(s_x) \quad (25)$$

$$u_y = \frac{c_3}{c_4k}(y - y_r) + y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x + \frac{pf_y}{k} - \frac{\ddot{y}_r}{k} + \frac{\lambda_y}{c_4k}\text{sign}(s_y) \quad (26)$$

其中 λ_x 、 λ_y 是大于 0 的待设计参数, sign 为符号函数。不适当地选取 c_1 、 c_2 、 λ_x 、 λ_y 等参数可能会使控制量出现较长时间的饱和, 导致系统失去稳定, 使下列不等式成立

$$|u_x| \geq g, |u_y| \geq g \quad (27)$$

平板倾角 α 、 β 的期望角度 α_r 、 β_r 分别为

$$\alpha_r = \arcsin(u_x / g) \quad (28)$$

$$\beta_r = \arcsin(u_y / g) \quad (29)$$

定理 1 若参数 k 、 p 及球板间的摩擦力 f_x 、 f_y 均已知, 并假设平板到达期望的角度 α_r 、 β_r , 采用反馈控制律式(25)(26), 并合理选择参数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 、 λ_x 、 λ_y , 则闭环系统是全局一致稳定的。

证明: 由反馈控制律式(25) (26), 闭环系统 Lyapunov 函数 V 的时间导数式(22)变为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\lambda_x s_x \text{sign}(s_x) - \lambda_y s_y \text{sign}(s_y) \\ &= -\lambda_x |s_x|^2 - \lambda_y |s_y|^2\end{aligned}\quad (30)$$

选取参数 λ_0 使之满足

$$\lambda_0 = \min \{\lambda_x, \lambda_y\} \quad (31)$$

则式(30)变为

$$\dot{V} \leq -\lambda_0 (|s_x|^2 + |s_y|^2) \leq 0 \quad (32)$$

则由 Lasalle-Yoshizawa 定理^[9]可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, 闭环系统在 $(x - x_r, \dot{x} - \dot{x}_r, y - y_r, \dot{y} - \dot{y}_r) = 0$ 处具有一个平衡点, 且平衡点是全局一致稳定的, 则闭环系统是全局一致稳定的。证毕。

2.2 球参数未知时的位置控制器设计

考虑球的质量、半径、转动惯量全部未知的情况。当球的部分参数已知时, 简化下面的位置控制器设计即可。

假设 2 球的质量、半径、转动惯量均未知。

由于和球相关的参数 k 、 p 都是不确定的, 重新选择系统的控制 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} c_1 (x - x_r)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x} - \dot{x}_r)^2 + \frac{1}{2} c_3 (y - y_r)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} c_4 (\dot{y} - \dot{y}_r)^2 + \frac{1}{2\eta_1} (k - \hat{k})^2 + \frac{1}{2\eta_2} (p - \hat{p})^2\end{aligned}\quad (33)$$

其中 \hat{k} 、 \hat{p} 为参数 k 、 p 的估计值; η_1 、 η_2 分别为参数估计增益, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ 。Lyapunov 函数 V 的时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\dot{x} - \dot{x}_r)[c_2 k (x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y) + c_2 p f_x + c_1 (x - x_r) - c_2 \ddot{x}_r - \\ &\quad c_2 k u_x] + (\dot{y} - \dot{y}_r)[c_4 k (y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x) + c_4 p f_y + \\ &\quad c_3 (y - y_r) - c_4 \ddot{y}_r - c_4 k u_y] - \frac{1}{\eta_1} \tilde{k} \dot{\hat{k}} - \frac{1}{\eta_2} \tilde{p} \dot{\hat{p}}\end{aligned}\quad (34)$$

\tilde{k} 、 \tilde{p} 分别为参数 k 、 p 的估计偏差

$$\tilde{k} = k - \hat{k} \quad (35)$$

$$\tilde{p} = p - \hat{p} \quad (36)$$

假设 3 在参数估计的过程中, \hat{k} 始终不为 0。

选取反馈控制律 u_x 、 u_y 及参数 k 、 p 的自适应律分别为

$$u_x = \frac{c_1}{c_2 \hat{k}} (x - x_r) + x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y + \frac{\hat{p}f_x}{\hat{k}} - \frac{\ddot{x}_r}{\hat{k}} + \frac{\lambda_x}{c_2 \hat{k}} \text{sign}(s_x) \quad (37)$$

$$u_y = \frac{c_3}{c_4 \hat{k}} (y - y_r) + y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x + \frac{\hat{p}f_y}{\hat{k}} - \frac{\ddot{y}_r}{\hat{k}} + \frac{\lambda_y}{c_4 \hat{k}} \text{sign}(s_y) \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}} &= \eta_1 c_2 s_x (x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y + \frac{\hat{p}f_x}{\hat{k}} - u_x) + \\ &\quad \eta_1 c_4 s_y (y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x + \frac{\hat{p}f_y}{\hat{k}} - u_y)\end{aligned}\quad (39)$$

$$\dot{\hat{p}} = \eta_2 c_2 f_x s_x + \eta_2 c_4 f_y s_y \quad (40)$$

在上述待设计参数中, 改变 λ_x 、 λ_y 可改变系统运动点趋近切换平面 $s_x = 0$ 、 $s_y = 0$ 的速率。 λ_x 、 λ_y 越小, 则趋近切换平面的速度越慢; λ_x 、 λ_y 越大, 则趋近切换平面的速度越快, 但系统的抖颤效应也越明显。选择 λ_x 、 λ_y 要同时考虑系统趋近切换平面的速率和抖颤效应给系统的冲击。调整参数 c_1 、

c_2 可改变对位置偏差的重视程度。 c_1/c_2 越大, 由位置偏差产生的控制量越大。参数 c_3 、 c_4 和参数 c_1 、 c_2 的作用相同。

定理 2 若球板间的摩擦力 f_x 、 f_y 已知, 并假设平板总能到达期望的角度 α_r 、 β_r 且估计值 \hat{k} 始终不为 0, 采用反馈控制律如式(37)(38), 选取参数 k 、 p 的自适应律如式(39)(40), 并合理选择参数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 、 λ_x 、 λ_y 、 η_1 、 η_2 , 则闭环系统是全局一致稳定的。

证明: 若合理选择 c_1 、 λ_x 等参数保证控制量不出现式(27)的饱和情况, 由反馈控制律式(37)(38)、参数 k 、 p 的自适应律式(39)(40), 则沿着式(6)的运动轨迹闭环系统 Lyapunov 函数 V 的时间导数变为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\lambda_x |s_x|^2 - \lambda_y |s_y|^2 + [\eta c_2 s_x (x\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}y + \frac{\hat{p}f_x}{\hat{k}} - u_x) + \\ &\quad \eta c_4 s_y (y\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}x + \frac{\hat{p}f_y}{\hat{k}} - u_y) - \frac{1}{\eta_1} \tilde{k} \dot{\hat{k}} + \\ &\quad (c_2 f_x s_x + c_4 f_y s_y - \frac{\hat{p}}{\eta_2}) \tilde{p}] = -\lambda_x |s_x|^2 - \lambda_y |s_y|^2\end{aligned}\quad (41)$$

选取参数 λ 使之满足

$$\lambda = \min \{\lambda_x, \lambda_y\} \quad (42)$$

则有

$$\dot{V} \leq -\lambda (|s_x|^2 + |s_y|^2) \leq 0 \quad (43)$$

根据 Lasalle-Yoshizawa 定理^[9]可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, 闭环系统在 $(x - x_r, \dot{x} - \dot{x}_r, y - y_r, \dot{y} - \dot{y}_r, k - \hat{k}, p - \hat{p}) = 0$ 处具有一个全局一致稳定的平衡点, 则说明闭环系统是全局一致稳定的。并且当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} s_y(t) = 0 \quad (44)$$

证毕。

2.3 伺服控制器的设计

伺服控制器采用 PD 控制结构。以平板 X 轴和水平面的倾角 α 来说明伺服控制器设计。输入为平板倾角 α 的角度偏差, 输出为发送到步进电机的脉冲个数。

$$p_\alpha(n) = k_p e_\alpha(n) + k_d \frac{e_\alpha(n) - e_\alpha(n-1)}{t_s} \quad (45)$$

其中 $e_\alpha(n)$ 为 n 时刻平板倾角 α 的角度偏差, k_p 为比例常数, k_d 为微分常数, t_s 为采样时间。

$$e_\alpha(n) = \alpha_r(n) - \alpha(n) \quad (46)$$

由式(13)(14)(45), 可将角度伺服控制器和步进电机联系起来, 模拟步进电机的动态过程。类似地可得到平板倾角 β 的角度伺服控制器

$$p_\beta(n) = k_p e_\beta(n) + k_d \frac{e_\beta(n) - e_\beta(n-1)}{t_s} \quad (47)$$

其中 $e_\beta(n)$ 为 n 时刻平板倾角 β 的角度偏差

$$e_\beta(n) = \beta_r(n) - \beta(n) \quad (48)$$

3 仿真

待跟踪轨迹为半径 150 mm 的圆。圆心和板的中心重合。

球的参考跟踪速度恒定, 为 9 mm/s 。球初始点坐标为 $(-150, 0)$ (mm)。球的质量 $m=0.263 \text{ kg}$, 半径 $r=0.02 \text{ m}$, 转动惯量 $I_b=4.208 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 重力加速度 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 。平板绕其 X 轴及 Y 轴的转动惯量分别为 $I_{px}=1.86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_{py}=1.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。步进电机的参数为, $N_s=50$, $\Phi_m=0.002 \text{ Wb}$, $\Lambda_1=1.54 \times 10^{-7} \text{ H}$, $z_r=100$, $I=5 \text{ A}$, $\Lambda_0=7.16 \times 10^{-7} \text{ H}$, $k_\sigma=1.4$, $\omega=62.83 \text{ rad/s}$ 。蜗杆传动装置的传动比 $m_x=5$, 左间隙 $b_l=-1.12 \times 10^{-6} \text{ rad}$, 右间隙 $b_r=1.12 \times 10^{-6} \text{ rad}$ 。伺服控制器的参数为 $k_p=200$, $k_d=3$ 。

仿真中加入的球板间摩擦力的模型如下^[6]

$$f_x = -\mu_{sx} \cdot mg \cos \alpha \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (49)$$

$$f_y = -\mu_{sy} \cdot mg \cos \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (50)$$

其中 μ_{sx} 和 μ_{sy} 分别为 X 方向及 Y 方向的球板间摩擦系数, $\mu_{sx}=0.0005$, $\mu_{sy}=0.0005$ 。

仿真在 Simulink 平台完成。球在平板上的运动见式(6), 步进电机的动态见式(13)(14), 传动机构的特性见式(15)(16)等, 这 3 个环节及摩擦观测器、位置控制器均由 s 函数封装。采用非线性自适应控制方法时, 仿真系统的 Simulink 结构图见图 3。为贴近工程实际, 在仿真中加入了测量噪声。式(6)中系统状态变量的测量值都受到了功率为 0.0005 W 的随机白噪声的干扰。包括作为位置控制器输入的反馈信号等都受到了随机白噪声的作用。

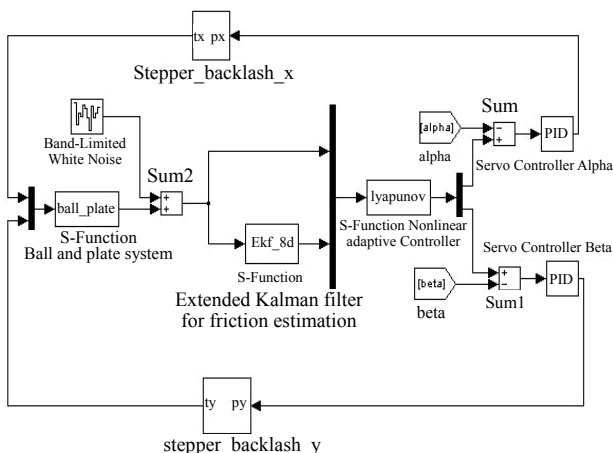


图 3 板球系统仿真平台 Simulink 结构图

当球的参数已知时, 以第 2.1 节中的方法 Lyapunov 直接方法构造位置控制器, 采用非线性观测器^[6]获得的摩擦力估计见图 4, 仿真结果见图 5, 球 X 方向和 Y 方向平均位置偏差分别为 0.02 mm 和 0.03 mm 。待设计参数分别为 $c_1=20$, $c_2=0.2$, $c_3=20$, $c_4=0.2$, $\lambda_x=5$, $\lambda_y=5$ 。为减小切换对系统的冲击, 在适当的边界层 w 以内以饱和函数 sat 来代替符号函数 sign ^[9], 选取边界层 $w=0.5$ 。

$$\operatorname{sat}(s_x) = \begin{cases} +1 & s_x > w \\ \frac{s_x}{w} & |s_x| \leq w \\ -1 & s_x < -w \end{cases} \quad (51)$$

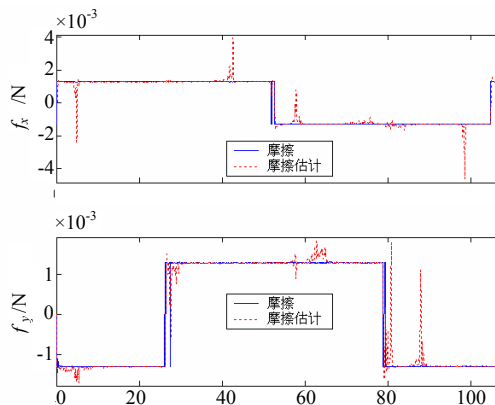


图 4 摩擦力估计

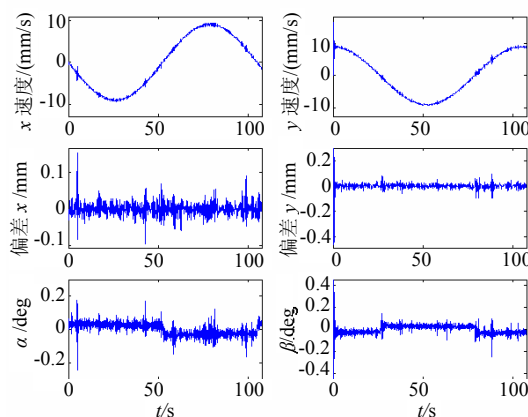


图 5 球参数已知时应用 Lyapunov 直接法的仿真结果

再考虑球半径、转动惯量、质量均未知的情况。若采用第 2.2 节中的非线性自适应控制方法, 仿真结果见图 6, 球 X 方向和 Y 方向平均位置偏差分别为 0.07 mm 和 0.07 mm 。待设计参数为 $c_1=20$, $c_2=0.2$, $c_3=20$, $c_4=0.2$, $\lambda_x=5$, $\lambda_y=5$ 。同样采取式(51)的饱和函数来代替符号函数, 边界层 $w=0.5$ 。自适应估计增益分别为 $\eta_1=1000$, $\eta_2=200$ 。未知参数初值为 $\hat{k}(0)=1$, $\hat{p}=2$ 。若采用模糊控制方法, 仿真结果见图 7, 球 X 方向和 Y 方向平均位置偏差分别为 4.52 mm 和 4.48 mm 。模糊控制器的设计细节见文献[3]。

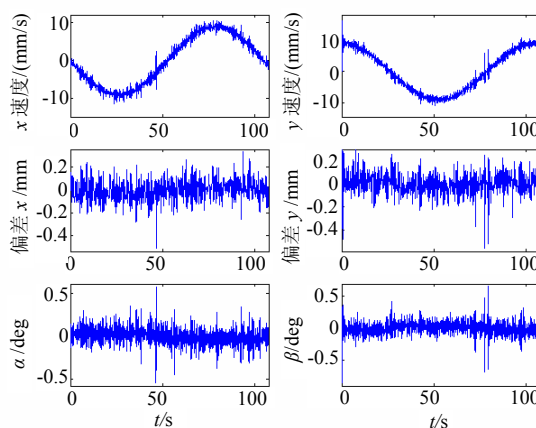


图 6 球参数未知时应用非线性自适应控制的仿真结果

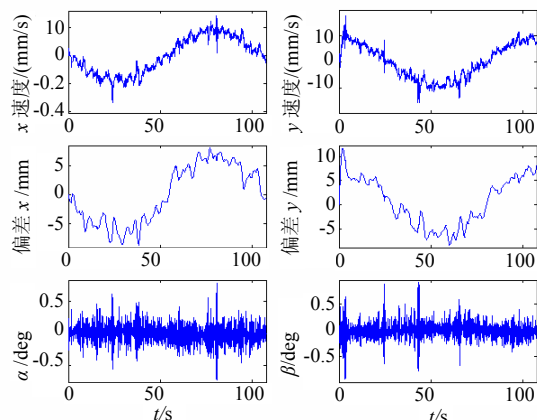


图 7 球参数未知时应用模糊控制的仿真结果

由仿真结果, 当球的参数已知时, 由于 Lyapunov 直接方法较完全地去除了系统非线性, 应用此方法可获得较小的平均位置偏差; 球参数未知时, 难以应用这种方法。非线性自适应控制方法则解决了球半径、质量、转动惯量未知时的控制问题。模糊控制方法虽没有要求球的精确参数, 但其平均位置偏差较大。由于模糊控制器未考虑系统的模型, 在大多数情况下, 只有当球的位置偏差存在并保持一定幅度时, 模糊控制器才能使球克服摩擦力等非线性来跟踪给定的轨迹。这样导致采用模糊控制器时系统产生了较大的位置偏差。当球参数变化时, 调整模糊逻辑可能还需要较长的时间。和模糊控制相比, 非线性自适应控制器考虑了球 X 和 Y 方向的运动耦合作用、摩擦等因素, 有效地去除了球板间的摩擦等非线性, 提高了系统的控制精度。

4 结论

板球系统包括了球在平板上运动、球板间摩擦、传动结构迟滞等一系列非线性环节。在高速跟踪任务中, 系统非线性和运动耦合作用给跟踪控制带来了挑战。为提高系统控制精度, 建立了包括球在板上运动、球板间摩擦、传动机构迟

滞非线性、步进电机动态等环节的系统模型, 开发了系统仿真平台。仿真平台缩小了仿真系统和实际系统的差距, 有利于系统的分析及综合设计。当球的半径、质量、转动惯量等参数均未知时, 结合 Lyapunov 稳定性理论, 提出了板球系统非线性自适应控制器的设计方法。推导了未知参数的自适应律并分析了其收敛性。与模糊控制器相比, 采用非线性自适应控制方法提高了板球系统的跟踪控制精度。

参考文献:

- [1] J Hauser, S Sastry, P Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example [J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 1992, 37(3): 392-398.
- [2] S Awtar, C Bernard, N Boklund, A Master, D Ueda, K Craig. Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system [J]. Mechatronics (S0957-4158), 2002, 12(2): 217-228.
- [3] H Wang, Y Tian, Z Sui, *et al.* Tracking control of ball and plate system with a double feedback loop structure [C]// Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2007, 2: 1114-1119.
- [4] J Park, Y Lee. Robust visual servoing for motion control of the ball on a plate [J]. Mechatronics (S0957-4158), 2003, 13(7): 723-738.
- [5] C Ker, Ch Lin, R Wang. Tracking and balance control of ball and plate system [J]. Journal of the Chinese institute of engineers (S0253-3839), 2007, 30(3): 459-470.
- [6] H Wang, Y Tian, C Ding, *et al.* Output Regulation of the Ball and Plate System with a Nonlinear Velocity Observer [C]// Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 2008: 2164-2169.
- [7] 刘宝廷, 程树康. 步进电动机及其驱动控制系统[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1997.
- [8] G Tao, P Kokotovic. Continuous-Time Adaptive Control of System with Unknown Backlash [J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 1995, 40(6): 1083-1087.
- [9] H Khalil. Nonlinear Systems (3rd edition) [M]. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 1996.
- [10] Martin MB, Bell AE. New image compression Techniques using multiwavelets and multiwavelet packets [J]. IEEE Trans. Image Processing (S1057-7149), 2001, 4(10): 500-510.
- [11] Gao Xieping, Zhou Siwang. A study of orthogonal, balanced and symmetric multi-wavelets on the interval [J]. Science in China. Series f, Information Sciences (S1674-5973), 2005, 48(5): 761-781.
- [12] Gao Xieping, Cao Chunhong. Minimum-energy wavelet frame on the interval [J]. Science in China Series f, Information Sciences (S1674-5973), 2008, 51(10): 1547-1562.
- [13] 王爱丽, 张晔, 谷延锋, 陈雨时. 基于多小波的 SAR 图像去噪与压缩[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(15): 4128-4131.
- [14] 胡社教, 谢锦生, 江萍, 马红杰. 基于平衡多小波与神经网络的图像水印算法研究[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(11): 2995-2998.

(上接第 1250 页)

- [4] Shen Z. Refinable function vectors [J]. SIAM J. Math. Anal (S0036-1410), 1998, 29(1): 235-250.
- [5] Plonka G. Approximation order provided by refinable function vectors [J]. Constr. Approx (S0176-4276), 1997, 13(2): 221-224.
- [6] Jiang Q. Parametrizations of M-channel orthogonal multifilter banks [J]. Adv. In Comp. Math (S1019-7168), 2000, 12(2): 189-211.
- [7] Jiang Q. On the regularity of matrix refinable functions [J]. Soc. Indus. Appl. Math (S0887-459X). J. Math. Anal, 1998, 29(5): 1157-1176.
- [8] 曾朝晖. 最优时频分辨率多小波构造研究[D]. 湘潭大学, 2007.
- [9] Chui C, Lian J. A study of orthonormal multi-wavelets [J]. Appl. Numer. Math (S0168-9274), 1996, 20(3): 273-298.