

# 基于 Toeplitz 矩阵重构的相干信源波达方向估计研究

伍逸枫<sup>1,2</sup>, 丛玉良<sup>2</sup>, 何 斌<sup>3</sup>

(1. 空军第一航空学院, 河南 信阳 464000; 2. 吉林大学通信工程学院, 长春 130025;  
3. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130025)

**摘 要:** 波达方向估计(DOA 估计)是实现目标精确定位的重要内容。针对相干信号源的波达方向角估计问题,提出了一种能有效解相干的互相关矢量 Toeplitz 矩阵重构算法。该算法利用了阵列接收数据互相关矢量的内在关系,实现了相干源的完全解相干。该算法不损失阵列孔径,无需阵列平滑。仿真结果表明了该算法的有效性。

**关键词:** 波达方向估计; MUSIC 算法; 共轭数据重排; 相干信源; Toeplitz 矩阵重构

中图分类号: V271.4; TN911.7 文献标志码: A 文章编号: 1671-637X(2010)03-0060-04

## DOA Estimation of Coherent Resources Based on Toeplitz Matrix Reconstruction

WU Yifeng<sup>1,2</sup>, CONG Yuliang<sup>2</sup>, HE Bin<sup>3</sup>

(1. The First Aeronautical Institute of Air Force, Xinyang 464000, China;

2. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China;

3. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130025, China)

**Abstract:** DOA estimation is an important part in target precision locating. A new de-correlation DOA estimation algorithm was proposed. It was based on the cross-correlation vector Toeplitz matrix reconstruction. To complete the DOA estimation for coherent signals, the internal relation of array receiving data was used. The algorithm doesn't need array smoothing and will not have aperture loss. Simulation results are presented to illustrate the efficiency and accuracy of this method.

**Key words:** DOA estimation; MUSIC algorithm; conjugate data rearrangement; coherent resources; Toeplitz matrix reconstruction

## 0 引言

波达方向估计(DOA 估计)已经广泛应用于雷达、声纳探测等目标定位领域<sup>[1]</sup>。在多径传播或存在欺骗干扰的军事环境中,信号高度相干,因此探索一种相干环境下适用于所有信号目标方位估计的算法很重要。基于空间平滑技术<sup>[2-3]</sup>的改进 MUSIC<sup>[4]</sup>去相干算法有很好的去相干性能,但由于它将传感器接收阵列分成了多个子阵,减小了阵元数和阵面孔径,进而减小了可估计信源数目,对前向空间平滑和前后向平滑可估计的信源数分别为  $M/2$  和  $2M/3$ 。同时,由于阵列孔径

变小,将使得对非相干信号源的 DOA 估计性能下降。另外由于空间平滑去相干技术把阵列分成了多个子阵列,也大大增加了计算量。

空间平滑去相干技术的实质是通过子阵的平滑来解决观测数据的协方差矩阵降秩的问题。本文利用 Toeplitz 矩阵理论<sup>[5]</sup>将阵列观测数据的相干函数进行重排,构造一满秩的 Toeplitz 矩阵。考虑实际观测数据是一复矩阵,将构造的 Toeplitz 矩阵和其共轭反置矩阵融合起来,再进行奇异值分解,充分利用了原始数据及其复共轭信息,提高了对相干信源的 DOA 估计性能<sup>[6-8]</sup>。

## 1 信号模型

### 1.1 物理环境

选取  $M$  个各向同性阵元组成的均匀线阵,考虑  $P(P < M)$  个窄带信号源  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $s_p(t)$ , 信源方

收稿日期:2009-02-28

修回日期:2009-04-22

基金项目:“八六三”国家高技术研究发展计划资助项目(2007A A12Z242);吉林省科技发展计划资助项目(20080520)

作者简介:伍逸枫(1978—),男,河南信阳人,硕士,讲师,研究方向为雷达信号处理。

向分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 。假设阵元噪声为相互独立的加性高斯白噪声,噪声功率为  $\sigma^2$  且与信源相互独立。则阵列接收信号矢量为

$$X(t) = A(\theta)S(t) + N(t) \quad (1)$$

式中:  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  为  $M$  个阵元的输出,  $T$  表示转置; 阵列导向矢量  $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_p)]$ , 其中:  $a(\theta_i) = [1, e^{j2\pi d \sin(\theta_i)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi d(M-1)\sin(\theta_i)/\lambda}]^T$ ; 信号矢量  $S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)]$ ; 噪声矢量  $N(t) = [n_0(t), n_1(t), \dots, n_{M-1}(t)]^T$ 。

## 1.2 数据模型

由式(1)可得阵列数据协方差矩阵

$$R_{xx} = E[X(t)X(t)^H] \quad (2)$$

数据协方差矩阵的元素为

$$[R_{xx}]_{ij} = E[x_i(t)x_j(t)^H] = R_{xx}(i-j) = R_{xx}^*(j-i) \quad (3)$$

其中:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}^*(1) & R_{xx}^*(2) & \dots & R_{xx}^*(M-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}^*(1) & \dots & R_{xx}^*(M-2) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}^*(M-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(M-1) & R_{xx}(M-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

由式(4)可以看出,在信号源独立的理想情况下  $R_{xx}$  具有 Toeplitz 矩阵性质。而实际上 MUSIC 算法是通过有限次快拍<sup>[6]</sup>采样来获得  $R_{xx}$  的近似估计  $\hat{R}_{xx} = X(k)^* X(k)^H / L$ ,  $L$  是快拍数,另外加上相干信源的影响,  $R_{xx}$  不再具有 Toeplitz 矩阵性质。

因此,通过对阵元接收数据矢量取自相干函数,重构一满秩 Toeplitz 矩阵,可以达到去相干的目的。第  $k$  个阵元接收的数据  $x_k(t)$  为

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^p s_i(t) e^{j2\pi d k \sin(\theta_i)/\lambda} + n_k(t) \quad (5)$$

定义如下的相干函数:

$$r(k-1) = E[x_1(t)x_k(t)^H] = R_{xx}^*(k-1) = A(1)R_{ss}A^H(k) + \sigma^2 I \quad (6)$$

式中:  $A(k)$  表示阵列流形  $A$  第  $k$  行所有元素;  $R_{ss}$  为信源自协方差矩阵。当  $k$  从 1 变化到  $M$  时,可以得到  $M$  个相干矢量:

$$[r(0), r(1), \dots, r(M-1)] = A(1)R_{ss} \cdot [A^H(1), A^H(2), \dots, A^H(M)] + \sigma^2 I \quad (7)$$

式中:  $R_{ss}$  是信源的子协方差矩阵。显然该数据矢量(7)包含了所有信源信息。

构造如下矩阵:

$$R_{\text{Toeplitz}} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(M-1) \\ 0 & r(0) & r(1) & \dots & r(M-2) \\ 0 & 0 & r(0) & \dots & r(M-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (8)$$

显然  $R_{\text{Toeplitz}}$  是一上三角 Toeplitz 矩阵,并且该矩阵包含了所有信源信息,无论信源是否相干,其均保持满秩,克服了常规 MUSIC 算法中由于多径效应或欺骗干扰环境导致信源相干数据协方差矩阵降秩、目标丢失的缺陷。

考虑实际应用中观测矩阵是一个复矩阵,自相干函数  $r(k-1)$  也是一复数据,吸收前后向空间平滑技术思想,对  $R_{\text{Toeplitz}}$  矩阵进行共轭重排:

$$R'_{\text{Toeplitz}} = J_M R_{\text{Toeplitz}}^* J_M \quad (9)$$

其中:  $J_M$  是  $M$  阶实交换矩阵,除反对角线上元素为 1 外,其余元素均为零,且有  $J_M J_M = I_M$ 。取  $R'_{xx} = (R_{\text{Toeplitz}} + R'_{\text{Toeplitz}})/2$  来代替 MUSIC 算法中的数据协方差矩阵。可以证明新构造的矩阵  $R'_{xx}$  也是一个 Toeplitz 矩阵。

## 2 算法流程

利用新构造的 Toeplitz 矩阵  $R'_{xx}$  来代替传统 MUSIC 算法中的协方差矩阵,再对  $R'_{xx}$  进行奇异值分解,通过谱峰搜索就可以估计出信源波达方向。

算法步骤如下:

- 1) 根据天线各阵元测得的数据来估计协方差矩阵  $\hat{R}_{xx} = X(k)X(k)^H / L$ ,  $L$  是快拍数;
- 2) 取  $\hat{R}_{xx}$  第一行元素分别赋给相干函数  $r(0), r(1), \dots, r(M-1)$ , 即  $r(k-1) = \hat{R}_{xx}(1, k)$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, M$ ,  $\hat{R}_{xx}(1, k)$  表示矩阵  $\hat{R}_{xx}$  第 1 行第  $k$  列元素,由元素  $r(k-1)$  构造出矩阵  $R_{\text{Toeplitz}}$ ;
- 3) 求  $R_{\text{Toeplitz}}$  共轭反置矩阵  $R'_{\text{Toeplitz}}$ , 求二者平均矩阵  $R'_{xx}$ ;
- 4) 对  $R'_{xx}$  进行奇异值(SVD)分解<sup>[7]</sup>, 构造噪声矩阵  $U_N$ ;

$$5) \text{ 计算空间谱 } P_{\text{music}} = \frac{1}{a^H(\theta) U_N U_N^H a(\theta)}.$$

## 3 仿真结果与比较

仿真采用各向同性的均匀线阵,波长  $\lambda = 0.1 \text{ m}$ , 阵元间距  $d = 0.45 \lambda$ , 阵元数目  $M = 8$ 。分别采用前向平滑算法、前后向平滑算法和本文算法对信号进行 DOA 估计。

### 3.1 平滑类算法和本文算法对相干信源的估计

阵元信噪比  $R_{\text{SNR}} = 20 \text{ dB}$ , 快拍数  $L = 1024$ , 相干

信源数目  $N=3$ , 角位置分别为  $-20^\circ$ 、 $10^\circ$  和  $20^\circ$ ; 然后将相干信源数目增加到  $N=4$ , 角位置分别为  $-20^\circ$ 、 $-10^\circ$ 、 $10^\circ$  和  $20^\circ$ , 估计结果分别如图 1、图 2 所示。

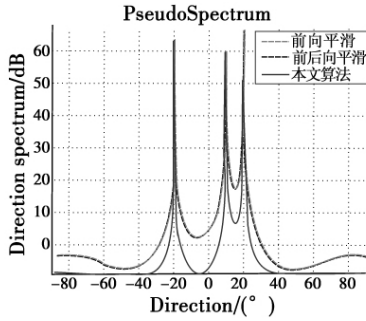


图 1  $N=3$  时 3 种算法的 DOA 估计  
Fig. 1 DOA estimation of three kinds of algorithm when  $N=3$

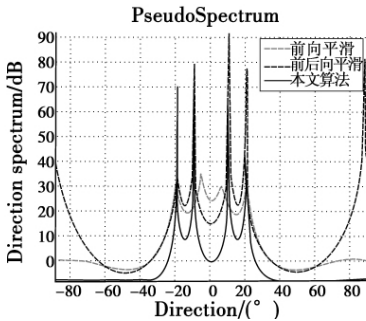


图 2  $N=4$  时 3 种算法的 DOA 估计  
Fig. 2 DOA estimation of three kinds of algorithm when  $N=4$

从图 1 可以看出当  $N=3$ , 小于  $M/2$  时 3 种算法均能很好地估计出相干信源的波达方向。但本文算法的谱峰更加尖锐, 分辨力更好。

由图 2 可以看出当  $N=4$ , 等于  $M/2$  时, 前向平滑已经失效; 前后向平滑算法理论上虽然能分辨  $2M/3$  个相干信源, 但由于采样数目、系统误差等影响, 空间谱也变差, 在无信源方向也出现谱峰; 而本文算法仍然能较好地完成估计。

将相干信源数目增加到  $N=5$ , 角位置分别为  $-20^\circ$ 、 $-10^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $20^\circ$  和  $40^\circ$ , 估计结果如图 3 所示。

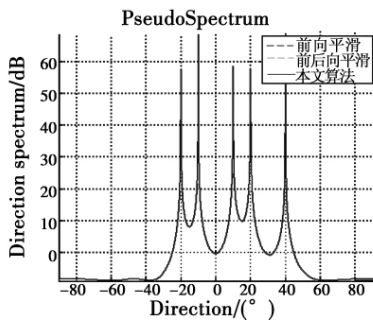


图 3  $N=5$  时 3 种算法的 DOA 估计  
Fig. 3 DOA estimation of three kinds of algorithms when  $N=5$

最后相干信源数目增加到  $N=M-1=7$ , 角位置分别为  $-30^\circ$ 、 $-20^\circ$ 、 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $20^\circ$  和  $45^\circ$ , 估计结果如图 4 所示。

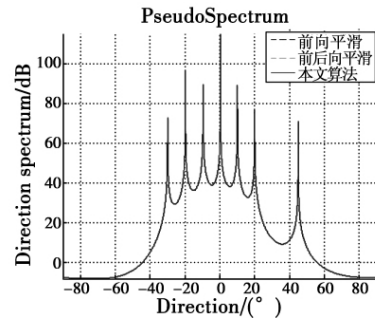


图 4  $N=7$  时 3 种算法的 DOA 估计  
Fig. 4 DOA estimation of three kinds of algorithm when  $N=7$

图 3 和图 4 仿真结果表明, 当信源数  $N=5$ ,  $N=M-1=7$  时, 平滑算法失效, 本文算法仍然可以较好地估计出所有信源波达方向, 显然本文重构算法没有子阵平滑, 无阵列孔径损失<sup>[9]</sup>, 大大增加了可估计信源数目。

### 3.2 平滑类算法和本文算法估计性能比较

1) 比较 3 种算法的 DOA 估计的计算量。对于不同数目相干信源, 相同条件下分别做 50 次 Monte Carlo 统计实验<sup>[10]</sup>, 运行时间如图 5 所示。

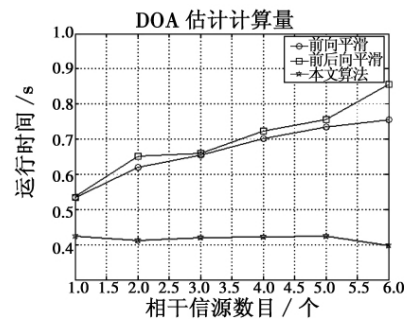


图 5 3 种算法估计运算时间

Fig. 5 Operation time of three kinds of algorithm

由图 5 可以看出, 随着估计的相干信源个数的增加, 由于空间平滑类算法需要平滑的子阵个数也要相应增加, 其运算量也迅速增大; 文中算法的计算量要小于空间平滑类算法, 且其计算量不受估计信源个数的影响。

2) 选取 3.1 节中的 3 个相干信源, 其他条件不变, 分别变化信噪比和快拍数目, 做 50 次 Monte Carlo 实验。比较 3 种算法的 DOA 估计性能。

信噪比从  $-10$  dB 增加到  $20$  dB, 每隔  $5$  dB 统计一次, 比较 3 种算法估计的均方差。仿真结果如图 6 所示。

从图 6 可以看出, 在相同的信噪比情况下, 文中算

法比空间平滑类算法有更小的估计方差,并且在低信噪比时也保持良好的估计性能。

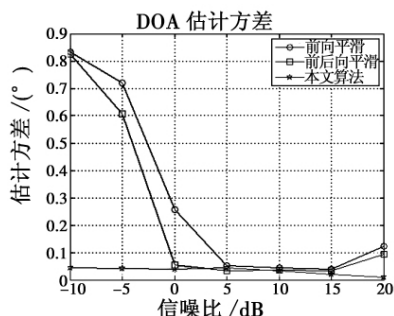


图6 信噪比不同时3种算法估计方差比较

Fig. 6 Estimated variance of three kinds of algorithm with different SNR

快拍次数从50增加到350,快拍数每变化50统计一次,比较3种算法估计的均方差。仿真结果如图7所示。

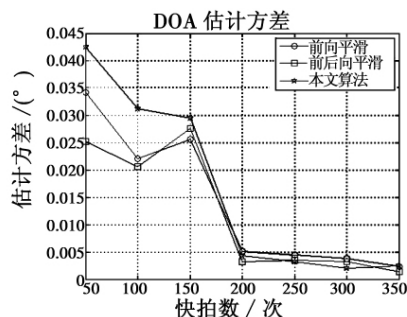


图7 快拍不同时3种算法估计方差比较

Fig. 7 Estimated variance of three kinds of algorithm on various snapshots

从图7可以看出,3种算法的估计方差受快拍次数的影响较大,尤其是快拍次数较少时,文中方法的估计性能比平滑类算法略差。但当快拍次数增大到200以后,3种算法的估计方差均趋于稳定,达到基本相同的估计性能。

#### 4 结论

文中提出的基于 Toeplitz 矩阵重构的相干信源波达方向估计算法,通过对阵元接收数据间的相干函数

进行重排,构造上三角 Toeplitz 满秩矩阵,并取其共轭反置做平均,充分利用了数据信息进行解相干处理,能够有效地完成相干信源 DOA 估计。与空间平滑类算法相比较,该算法不需要进行空间平滑,不仅无阵元有效孔径损失,增加了可估计相干信源的数目,而且降低了运算量。仿真结果表明,在相同的条件下,该算法的估计性能优于空间平滑类算法。

#### 参考文献

- [1] 廖海军. 一种新的测向交叉定位算法[J]. 电光与控制, 2008, 15(9): 29-31.
- [2] PILLAI S U. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification[J]. IEEE Trans Acoust Speech, Signal Processing, 1991, 39(11): 2436-2449.
- [3] WANG H, LIU K J R, ANDERSON H. Spatial smoothing for arrays with arbitrary geometry[C]//Proc ICASSP-94, 1994: 509-512.
- [4] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [5] 余品能,王煜. Toeplitz 矩阵相乘的一种新快速算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2008(3): 207-214.
- [6] 崔冬,丛玉良,顾广华. 基于共轭数据重排的信道预测算法[J]. 吉林大学学报:信息科学版, 2005, 23(6): 574-577.
- [7] CHOY H. Coherent source localization with forward/backward covariance matrices[C]//IEEE Proc Radar Sonar Navig, 2002, 149(3): 145-151.
- [8] SHAN T, KAILATH W. On spatial smoothing for direction arrival estimation of coherent signal[J]. IEEE Trans ASSP, 1985, 33: 806-811.
- [9] KIM K K, SARKAR T K, WANG H, et al. Direction of arrival estimation based on temporal and spatial processing using direct data domain(D3) approach[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2004, 52(2): 533-541.
- [10] 刘波,文忠,曾涯. MATLAB 信号处理[M]. 北京:电子工业出版社, 2006.

欢迎订阅 欢迎刊登广告