

独立分量分析的理论框架

Theory Framework of Independent Component Analysis

(1.中国科学院长春光学精密机械与物理研究所图像室;2.中国科学院研究生院)蔡荣太^{1,2} 王延杰¹

CAI RONGTAI WANG YANJIE

摘要:分析了信号独立的统计学来源,从高阶统计量分析、信息论和参数估计理论推导信号独立的数学描述,以这些数学描述构造相应的独立分解目标函数:高阶统计量最小、互信息最小和最大似然估计目标函数,以函数的最优化问题统一这些目标函数。围绕统一的目标函数,采用求导法和等价的三角极值函数法,分别推导出独立分量分析(ICA)的三类分解算法:梯度法、固定点迭代法和 Jacobi 旋转法。以这些理论推导构造了 ICA 的理论框架。

关键词:独立分量分析;盲源分离;梯度算法;固定点算法;Jacobi 旋转法;理论框架

中图分类号:TP 391 TN911.6

文献标识码:A

Abstract:Source of the signal-independence in statistical theory is introduced. The mathematics descriptions of signal-independence in higher-order statistics analysis, information theory and parameter estimation theory are deduced. Cost-functions of independence analysis are constructed from the equivalent description, and an extremum expression is introduced to uniform these cost-functions. Independence decompose methods including gradient methods, fixed-point ICA and Jacobi methods is deduced from the derivative and trigonometric function expression of the extremum expression, which is to solve the cost-function. These works construct the theory framework of the ICA.

Key words:ICA, Blind Source Separation (BSS), gradient methods, fixed-point ICA, Jacobi methods, theory framework

1 引言

ICA是继奇异值分解(SVD)和主分量分析(PCA)之后发展起来的一种新的多变量信号处理技术,已经广泛应用于盲源分离、生物工程、故障诊断、信号处理和模式识别等领域。设有 N 个独立的信源 s ,通过信道 A 之后,混合成观测信号 $x=As$ 。独立分量分析是在没有信源 s 和信道 A 先验知识的情况下,寻找解混矩阵 B ,使得 x 经 B 解混后为 N 个独立的分量 $y=Bx$ 。目前,ICA 尚未建立完整的理论体系。本文尝试理清 ICA 的“来龙去脉”,构造其理论体系。

2 信号独立的理论来源与数学描述

随机信号可以由其概率密度函数 $p(y)$ 完全描述。在统计信号处理中,常用正交、相关和独立来描述不同随机信号之间的关系。若 N 个信号 y_1, y_2, \dots, y_N 统计独立,则有

$$p(y) = \prod_{i=1}^N p(y_i) \quad (1)$$

由于概率密度难以估计,需要寻找式(1)的等价描述。以下考察各分量独立的信号在高阶统计量分析和信息论中的数学描述。

2.1 考察 y 的第一特征函数

由第一特征函数的定义和式(1)有

$$\Phi(w) = - \int p(y) e^{jw^T y} dy = \prod_{i=1}^N \int p(y_i) e^{jw_i^T y_i} dy_i = \prod_{i=1}^N \Phi(w_i) \quad (2)$$

式中 $\int_{\Omega(y)} dY = \int_{\Omega(y_1)} dy_1 \cdot \int_{\Omega(y_2)} dy_2 \cdots \int_{\Omega(y_N)} dy_N$, $\Omega(y)$ 为 y 的值域。

式(2)表明各分量独立的随机信号,其第一特征函数等于各分量第一特征函数的连乘积。

2.2 考察 y 的第二特征函数

由第二特征函数和第一特征函数的关系及式(2),有

$$\Psi(w) = \log \Phi(w) = \log \prod_{i=1}^N \Phi(w_i) = \sum_{i=1}^N \Psi(w_i) \quad (3)$$

式(3)表明各分量独立的随机信号的第二特征函数为各分量第二特征函数之和。

2.3 考察 y 的 N 阶联合累计量

由 N 阶累计量的定义和式(3)有

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \frac{\partial^N \Psi(w)}{\partial w_1^{n_1} \partial w_2^{n_2} \cdots \partial w_N^{n_N}} \bigg|_{w_i=0} = \frac{\partial^N \sum_{i=1}^N \Psi(w_i)}{\partial w_1^{n_1} \partial w_2^{n_2} \cdots \partial w_N^{n_N}} \bigg|_{w_i=0} \quad (4)$$

式中 $N=n_1+n_2+\dots+n_N$ 。当存在至少两个 $n_i \neq 0, i=1, 2, \dots, N$ 时,由式(4)有

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_N} = 0, \exists n_i \neq 0, n_j \neq 0; i, j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

式(5)表明当存在至少两个 $n_i \neq 0, i=1, 2, \dots, N$ 时,各分量独立的随机信号的联合累计量为 0。

2.4 考察 y 的互信息

由互信息的定义和式(1)有

$$I(y) = KL[p(y), \prod_{i=1}^N p(y_i)] = \int p(y) \log[p(y) / \prod_{i=1}^N p(y_i)] dy = 0 \quad (6)$$

式(6)表明各分量独立的随机信号互信息为 0。

3 独立分解目标函数的构造

3.1 从高阶统计量构造目标函数

设信号均值为零,由式(5)知,各分量独立的信号的二、三、四阶累计量均为零,即

蔡荣太:博士研究生

基金项目:国家“863”基金(2006AA703405F)

$$K_{ij}(y)=E(y_i, y_j)=M_{ij}(y)=0 \quad (7.1)$$

$$K_{ijk}(y)=E(y_i, y_j, y_k)=M_{ijk}(y)=0 \quad (7.2)$$

$$K_{ijkl}(y)=M_{ijkl}(y)-M_{ij}M_{kl}(y)-M_{ik}M_{jl}(y)-M_{il}M_{jk}(y)=0 \quad (7.3)$$

其中, $i \leq j \leq k \leq l; i, j, k, l=1, 2, \dots, N$ 。根据 $y=Bx$ 及联合累计量的比例性和可加性, 有

$$K_{ij}(y)=BM_{ij}(x)=0 \quad (8.1)$$

$$K_{ijk}(y)=BM_{ijk}(x)=0 \quad (8.2)$$

$$K_{ijkl}(y)=B[M_{ijkl}(x)-M_{ij}M_{kl}(x)-M_{ik}M_{jl}(x)-M_{il}M_{jk}(x)]=0 \quad (8.3)$$

由式(8)构造基于高阶统计量的独立分解的目标函数, 为

$$L_{HO}(\mathbf{B}, \alpha, \beta, \gamma) = \min \left\{ \mathbf{B}(\alpha \sum_{i,j=1}^M \|M_{i,j}(x)\| + \beta \sum_{i,j,k=1}^M \|M_{i,j,k}(x)\| + \gamma \sum_{i,j,k,l=1}^M \|M_{i,j,k,l}(x)\|) \right\} \quad (9)$$

式中, $i \leq j \leq k \leq l; i, j, k, l=1, 2, \dots, M; \alpha, \beta, \gamma$ 为 Lagrange 乘子。

令 $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\alpha \quad \beta \quad \gamma)$,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i,j=1}^M \|M_{i,j}(x)\| \quad \sum_{i,j,k=1}^M \|M_{i,j,k}(x)\| \quad \sum_{i,j,k,l=1}^M \|M_{i,j,k,l}(x)\| \right)^T$$

则基于高阶统计量的目标函数为

$$L_{HO} = \min \{\bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x})\} \quad (10)$$

3.2 从互信息构造目标函数

从互信息的定义容易得到

$$I(y) = \sum_{i=1}^N H(y_i) - H(y) \quad (11)$$

考察公式 (6), 以互信息最小作为信号独立分解的目标函数。由 $y=Bx$ 知

$$y_i = \sum_{j=1}^M b_{ij}x_j = \mathbf{b}_i \mathbf{x} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (12)$$

式中 b_{ij} 是 B 的第 (i,j) 个元素, \mathbf{b}_i 为 B 的第 i 行。由式(6)、(11)和(12)有

$$L_{MI}(\mathbf{B}) = \min I(y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^N H(y_i) - H(\mathbf{x}) - \log |\mathbf{B}| \right\} \propto \min \left\{ \sum_{i=1}^N H(y_i) - \log |\mathbf{B}| \right\} \quad (13)$$

式中 $C[k_3(y_i), k_4(y_i)]$ 表示三阶统计量和四阶统计量的组合, 如 $C[k_3(y_i), k_4(y_i)] = -1/48[4k_3^2(y_i) + k_4^2(y_i) + 7k_3^4(y_i) - 6k_3^2(y_i)k_4(y_i)]$ 。

3.3 从估计理论构造目标函数

以最大似然估计为例, \mathbf{x} 的似然函数为 $\log p(\mathbf{x}|\mathbf{B})$ 。根据 $y=Bx$ 和式(1)、(12)可得基于最大似然估计的独立分解目标函数为

$$\begin{aligned} L_{ML}(\mathbf{B}) &= \max[\log p(\mathbf{x}|\mathbf{B})] = \max[\log |\mathbf{B}| p(\mathbf{y})] = \max[\log |\mathbf{B}| \prod_{i=1}^N p(y_i)] \\ &= \max[\log |\mathbf{B}| + \sum_{i=1}^N \log p(y_i)] = \max[\log |\mathbf{B}| + \sum_{i=1}^N \log p(\sum_{j=1}^M b_{ij}x_j)] \end{aligned} \quad (14)$$

3.4 目标函数的统一

文献中阐述了各种目标函数的等价关系。目标函数的等价性来源于信号独立性的等价度量。以上推导的各种目标函数最终统一为一个最优化问题, 该函数以解混矩阵 B 和观测信号 \mathbf{x} 为自变量。它们的统一表达式为

$$L(\mathbf{B}) = \min(\max) f(\mathbf{B}, \mathbf{x}) \quad (15)$$

式(15)可转化为三角极值问题。令 $\mathbf{B} = h(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = h^{-1}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{B})$, 则式(15)为

$$L(\mathbf{B}) = \min f(\mathbf{B}, \mathbf{x}) = \min \sum_{j=1}^M [\alpha k_3(x_j) + \beta k_4(x_j)] \sum_{i=1}^N [\sin(a_i \theta_{ij}(\mathbf{B}) - \omega_{i,j})] \quad (16)$$

式中 $|\theta| \leq \pi/4$, $\alpha, \beta, a_i, \omega_{i,j}$ 都是常数。

4 独立分量的分解算法

4.1 梯度法

对式(15)求导, 并令其等于零, 有

$$\partial f(\mathbf{B}, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{B} = 0 \quad (17)$$

梯度算法令 $\partial f(\mathbf{B}, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{B} = \mathbf{B}(k+1) - \mathbf{B}(k) = \nabla \mathbf{B}$, 迭代求解 $\mathbf{B}(k)$, 当 $\nabla \mathbf{B} < \varepsilon$ (ε 为事先确定的某一个阈值)时, 迭代结束。调节 \mathbf{B} 时, 一般还要引入调节步长 u_k , 即令

$$\mathbf{B}(k+1) = \mathbf{B}(k) + u_k \cdot \nabla \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}(k) + u_k \cdot \partial f(\mathbf{B}(k), \mathbf{x}) / \partial \mathbf{B}(k) \quad (18)$$

将 f 的表达式代入公式(18), 得一般的调节公式为

$$\mathbf{B}(k+1) = \mathbf{B}(k) + u_k \cdot [\mathbf{B}^{-T}(k) - \psi(\mathbf{B}(k)\mathbf{x})\mathbf{x}^T] \quad (19)$$

常规梯度中 $\nabla \mathbf{B}(k) = [\mathbf{B}^{-T}(k) - \psi(\mathbf{B}(k)\mathbf{x})\mathbf{x}^T]$, 涉及矩阵求逆计算, 计算量较大, 可用自然梯度和相对梯度来代替, 以提高计算速度。相对梯度和自然梯度分别为

$$\nabla_{\text{natural}} \mathbf{B}(k) = \nabla \mathbf{B}(k) \mathbf{B}^T \mathbf{B} = [\mathbf{I} - \psi(\mathbf{B}(k)\mathbf{x})\mathbf{x}^T] \mathbf{B},$$

$$\nabla_{\text{relative}} \mathbf{B}(k) = \nabla \mathbf{B}(k) \mathbf{B}^T = [\mathbf{I} - \psi(\mathbf{B}(k)\mathbf{x})\mathbf{x}^T]_0.$$

4.2 固定点迭代算法

固定点迭代法的一般原理如下: 设方程组为 $f(\mathbf{x})=0$ 等价于 $\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$, 构造迭代公式

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k)), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

令 $\nabla_{\text{natural}} \mathbf{B}(k) = \partial f(\mathbf{B}, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{B} = 0$, 代入式(20), 可得独立分量分析的固定点迭代法为

$$\mathbf{B}(k+1) = \psi(\mathbf{B}(k)\mathbf{x})\mathbf{x}^T \mathbf{B}(k) \quad (21)$$

为提高算法的稳定性, 还可采用牛顿迭代法

$$\mathbf{B}(k+1) = \mathbf{B}(k) - f[\mathbf{B}(k), \mathbf{x}] / \nabla \mathbf{B}(k).$$

4.3 Jacobi 旋转法

对于三角极值形式的目标函数式(16), 当 $\theta_{ij} = \omega_{ij}/a_i, i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, N$ 时, $L(\mathbf{B})$ 得解。Jacobi 方法将解混矩阵 B 的求解分解为两个步骤:

1) 对观测数据 \mathbf{x} 进行白化处理, 求取白化后的数据 \mathbf{z} , 即求 $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ s.t. $E(\mathbf{z}^T \mathbf{z}) = \mathbf{I}$ 。

2) 旋转 \mathbf{z} , 使得旋转后的各分量尽量独立, 即求 \mathbf{R} 使得 $\mathbf{y} = \mathbf{R}^T \mathbf{z}$ 且 \mathbf{y} 的各分量尽可能独立。其中, \mathbf{R} 为旋转矩阵, 由一系列的平面旋转矩阵 \mathbf{R}_{ij} 连乘而成。 \mathbf{R}_{ij} 为一稀疏矩阵

$$\mathbf{R}_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos \theta_i & \cdots & -\sin \theta_i & \\ & & \sin \theta_i & \cdots & \cos \theta_i & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i\text{列} \\ j\text{列} \\ i\text{行} \\ j\text{行} \end{matrix} \quad (22)$$

式中 \mathbf{R}_{ij} 是一个正交矩阵, $\mathbf{R}_{ij}^T = \mathbf{R}_{ij}^{-1}$ 。令 $y_{ij} = y_{ij}/\sigma_i$, 可以解得 θ_i 。对所有 \mathbf{z} , \mathbf{z}_i 都作一次旋转, 完成一次“扫描”。经过多次迭代扫描之后, 使得所有的 θ_i 小于规定的阈值, 可解得 \mathbf{R} 。那么解混矩阵为 $\mathbf{B} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{B})]$ 。与该方法同类的还有四阶累计量特征分解法, 特征矩阵联合近似对角化法等。

5 独立分量分析的理论框架

综上所述, ICA 是以统计学上的独立为分解目标, 从高阶统计分析、信息论和参数估计理论出发构造目标函数, 以优化理论和数值计算方法为求解方法的最优化问题 (信号逼近问题)。根据以上推导可以得到 ICA 的理论框架, 如图 1 所示。

6 结论

本文从统计学上寻找 ICA 的理论来源, 推导了独立性的等价描述, 构造了独立分解的目标函数; 根据构造的目标函数推导了独立分解算法; (下转第 305 页)



图3 几种边缘检测算子处理结果比较

通过对图3的观察可看出, Roberts算子、Sobel算子和 Prewitt算子计算简单, 但精度不高, 只能检测出车牌图像的轮廓, 对于比较细的车牌图像边缘检测不出, 而且检测出的部分边缘连续性不好。Log算子的检测效果好于梯度算子, 能检测出车牌图像较细的边缘部分, 但检测结果也不够理想, 一方面, 图像在高斯滤波时存在很多零交叉点, LOG算子把这些零交叉点都判断为边缘点, 因此, 造成车牌图像边缘检测结果中含有很多噪声点; 另一方面, LOG算子是二阶微分算子, 对图像中的阶跃型边缘点定位准确且具有旋转不变性即无方向性, 但是该算子容易丢失一部分边缘的方向信息, 因此, 造成一些不连续的检测边缘。Canny算子相比其他算子能检测出比较完整、连续且细锐的边缘, 但在平滑过程中也平滑掉一部分边缘。

4 结语

边缘检测在车牌图像处理中占有极其重要的地位, 通过理论及实验的各种分析可知, 各种边缘检测算子都有自己的优缺点及其适用范围, 我们不能单从理论上决定某种算法的优良, 应根据实际的工程应用背景选择合适的边缘检测算子, 因此针对不同的环境条件和使用要求, 应选择合适的算子, 也可以用多种算子结合来对图像进行边缘检测, 以达到良好的处理结果。本文作者创新点: 对数字图像处理中几种具有代表性的边缘检测算子进行了理论分析, 并通过 VC++编程用各种算子对车牌图像进行边缘提取, 通过比较得出了各种算子的精度及在检测中算子选定的参考条件, 为实际应用采用哪种算法提供对照和参考。

参考文献

- [1] 孟杰, 伯绍波, 苏诗琳. 基于灰度图像的车牌字符提取算法研究[J]. 微计算机信息, 2007, 9-1: 254-255.
- [2] 谢建平. 一种基于快速最近特征线的汽车牌照识别方法[J]. 电视技术, 2006, 286(4): 93-96.
- [3] 王耀南, 李树涛, 毛建旭. 计算机图像处理与识别技术[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003, 2.
- [4] 杨淑莹. VC++图像处理程序设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006, 1.

作者简介: 黄剑玲(1964-), 女(汉族), 江西上饶人, 上饶师范学院数学与计算机系副教授, 主要从事图像处理研究。

Biography: Huang Jianling (1964-), woman (the Han nationality), Shangrao Jiangxi man, adjunct professor of Mathematics and Computer Department, Shangrao Teacher's College, Research in the field of image processing.

(334000 江西 上饶 上饶师范学院数学与计算机系) 黄剑玲

(334000 江西 上饶职业技术学院机械系) 邹辉

通讯地址: (334001 江西 上饶 上饶师范学院数学与计算机系) 黄剑玲

(收稿日期: 2007.9.11) (修稿日期: 2007.11.11)

(上接第198页)

建立了以高阶统计量分析、信息论和参数估计理论为基础、以优化理论和数值计算方法为求解方法的ICA理论框架。该理论框架是ICA的其它问题如噪声ICA和欠定盲源分离等的基础。

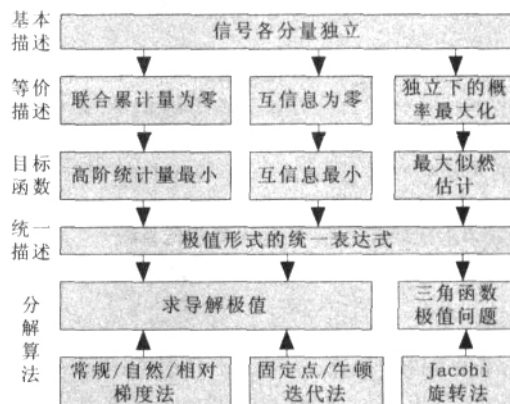


图1 独立分量分析的理论框架

本文创新点: 通过理论推导, 阐明了独立分量分析的来龙去脉, 并把该理论和高阶统计量分析、参数估计、优化算法等信号处理理论联系起来, 建立了独立分量分析的基本理论框架。为系统和深入研究独立分量分析奠定基础。

参考文献

- [1] COMON P, et al. Independent component analysis: A New concept? [J]. Signal processing, 1994, 36: 287-314.
- [2] 张云, 周剑利, 郭建波等. 时频分析和盲源分离在发电机转子系统故障诊断中的应用[J]. 微计算机信息, 2005, 21(18): 145-146+49.
- [3] 张旭秀, 邱天爽. 基于源信号之间统计独立性的ICA方法的等价性研究. 探测与控制学报, 2003, 25(4): 21-25.
- [4] J.F. Cardoso, et al. Eigen-structure of the four-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem. Proc. IEEE ICASSP, 1990: 2655-2658.
- [5] 何为伟, 肖俊, 楼建东等. 基于高斯矩的NoisyICA研究[J]. 微计算机信息, 2005, 21(05): 216-217.
- [6] Pierre Comon. Blind Identification and Source Separation in 2×3 Under-determined mixtures. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, 52(1), 2004: 1-13.

作者简介: 蔡荣太(1979-), 男, 福建人, 博士研究生, 研究方向: 信号与图像处理, 模式识别。王延杰(1963-), 男, 吉林人, 主任研究员, 博士生导师, 研究方向: 实时图像处理, 目标识别与跟踪。

Biography: Cai Rongtai (1979-), male, from Fujian. Doctor Degree Candidate. He is interesting in signal processing, image processing, and pattern recognition.

(130033 吉林长春 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所图像室) 蔡荣太 王延杰

(100039 北京 中国科学院研究生院) 蔡荣太

通讯地址: (130033 长春市 东南湖大路16号 长春光机所图像室) 蔡荣太

(收稿日期: 2007.9.03) (修稿日期: 2007.11.05)